

**ДОДАТНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ СРБИЈЕ
ЗА БАЛКАНСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ**

Београд, 7. октобар 2020.

1. Нека су a, b, c и d позитивни бројеви за које важи $a+b+c+d = 4$. Доказати неједнакост:

$$\frac{(a + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{(b + \sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{(c + \sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2 - cd + d^2}} + \frac{(d + \sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2 - da + a^2}} \leq 16.$$

2. Тачка I је центар уписаног круга троугла ABC . Права AI сече описану кружницу Ω троугла ABC у тачки $M \neq A$. Тачка J је симетрична тачки I у односу на средиште D странице BC . Права MJ сече кружницу Ω у тачки $P \neq M$. Доказати да је једна од дужи PA, PB, PC једнака збиру остале две.
3. Дат је природан број n . На таблу $2n \times 2n$ постављено је k правоугаоника димензија $1 \times n$ тако да се никоја два не преклапају, али није могуће поставити још један такав правоугаоник без преклапања. Одредити најмању могућу вредност броја k .
4. Наћи све парове позитивних рационалних бројева (x, y) таквих да важи

$$x^y \cdot y^x = y^y.$$

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.