15^{th} International Zhautykov Olympiad in Mathematics

Almaty , January 9-15, 2019

Први дан – 11.1.2019.

1. Доказати да постоји бар 100! начина да се број 100! растави на сабирке из скупа $\{1!, 2!, 3!, \ldots, 99!\}$.

(Растављања која се разликују само у редоследу сабирака сматрамо истим. Сваки сабирак се може појавити више пута. Наравно, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.)

2. Наћи реалну константу C такву да за све међусобно различите позитивне реалне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ важи неједнакост

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \cdots + \frac{a_{2018}}{|a_{2019} - a_1|} + \frac{a_{2019}}{|a_1 - a_2|} > C.$$

3. Продужетак тежишне дужи CM троугла ABC сече описани круг ω тог троугла у тачки N. Тачке P и Q на полуправим CA и CB редом су такве да је $PM \parallel BN$ и $QM \parallel AN$. Тачке X и Y на дужима PM и QM редом су такве да су PY и QX тангенте на круг ω. Дужи PY и QX се секу у тачки Z. Доказати да се у четвороугао $MXZY$ може уписати круг.

Други дан – 12.1.2019.

4. Дат је једнакокраки троугао ABC у коме је $AC = BC$. На траници AC одабрана је тачка D. Круг S_1 са центром O_1 и полупречником R додирује дуж AD и продужетке дужи BA и BD преко тачака A и D, редом. Круг S_2 са центром O_2 и полупречником $2R$ додирује дуж DC и продужетке дужи BD и BC преко D и C, редом. Тангента на описани круг троугла BO_1O_2 у тачки O_2 сече праву BA у тачки F. Доказати да је $O_1F = O_1O_2$.

5. Нека је $n > 1$ природан број. Дата је функција $f : I \to \mathbb{Z}$, где је I скуп свих целих бројева узајамно простих са n (а $\mathbb{Z}$ скуп свих целих бројева). Природан број k се назива *периодом* функције f ако важи $f(a) = f(b)$ кад год су $a, b \in I$ такви да је $a \equiv b \pmod{k}$. Ако је n период функције f, доказати да најмањи период те функције дели све њене периоде.

Пример. Ако је $n = 6$, функција f с периодом 6 је потпуно одређена вредностима $f(1)$ и $f(5)$. Ако је $f(1) = f(5)$, најмањи период функције је $P_{\min} = 1$, а ако је $f(1) \neq f(5)$, најмањи период је $P_{\min} = 3$.

6. На полиному трећег степена дозвољено вршити следеће операције неограничен број пута:

(1°) обрнути поредак његових коефицијената, укључујући и нуле (нпр. тако би се из полинома $x^3 - 2x^2 - 3$ добио полином $-3x^3 - 2x + 1$;

(2°) заменити полином $P(x)$ полиномом $P(x + 1)$.

Може ли се из полинома $x^3 - 2$ добити полином $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$?

Време за рад: 270 минута сваког дана.

Сваки задатак вреди 7 поена.