Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

13. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. април 2019.

Први дан

1. Одредити све природне бројеве n $(n > 1)$ који имају следеће својство: ако су $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ сви природни бројеви мањи од n и узајамно прости са n и важи поредак $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$, онда ниједан од збирова $a_i + a_{i+1}$ за $i = 1, 2, \ldots, k-1$ није дељив са 3. *(Душан Ђукић)*

2. За низ ненегативних реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_k$ кажемо да је *уложив* у интервал $[b, c]$ ако постоје бројеви $x_0, x_1, \ldots, x_k$ из интервала $[b, c]$ такви да важи $|x_i - x_{i-1}| = a_i$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Низ је *нормиран* ако су сви његови чланови не већи од 1. За задат природан број n, доказати:

(а) сваки нормиран низ дужине $2n+1$ је уложив у интервал $[0, 2-\frac{1}{2^n}]$;

(б) постоји нормиран низ дужине $4n+3$ који није уложив у $[0, 2-\frac{1}{2^n}]$.

(Душан Ђукић)

3. Конвексан четвороугао $ABCD$ је описан око кружнице k. Праве AD и BC се секу у тачки P, а кружнице описане око $\triangle PAB$ и $\triangle PCD$ се секу у тачки X. Доказати да тангенте из тачке X на кружницу k граде једнаке углове са правима AX и CX. *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

13. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. април 2019.

Други дан

4. Дат је $\triangle ABC$. Нека је A_1 централносиметрична слика пресечне тачке симетрале $\measuredangle BAC$ и странице BC, где је центар симетрије средина странице BC. Аналогно дефинишемо тачке B_1 (на страници CA) и C_1 (на страници AB). Пресек кружнице описане око $\triangle A_1B_1C_1$ с правом AB је скуп $\{Z, C_1\}$, с правом BC је скуп $\{X, A_1\}$, а с правом CA је скуп $\{Y, B_1\}$. Ако се нормале из тачака X, Y и Z на BC, CA и AB, редом, секу у једној тачки, доказати да је $\triangle ABC$ једнакокрак. *(Милош Милосављевић)*

5. На планети X облика лопте се налази $2n$ бензинских пумпи. Притом је свака пумпа упарена с по једном другом пумпом и сваке две упарене пумпе се налазе на дијаметрално супротним тачкама планете. На свакој пумпи се налази одређена количина бензина. Познато је следеће: уколико аутомобил с претходно празним (довољно великим) резервоаром крене с ма које пумпе, увек може стићи до пумпе с њом упарене (уз могуће допуњавање бензина на другим пумпама током пута). Одредити све природне бројеве n такве да, за ма какав распоред $2n$ пумпи који испуњава наведени услов, увек постоји пумпа од које аутомобил може кренути с претходно празним резервоаром и обићи све остале пумпе на планети. (Сматрати да аутомобил троши константну количину бензина по јединици дужине.) *(Никола Петровић)*

6. Низови $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ дефинисани су рекурентним релацијама

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2018}{n} a_n + a_{n-1} \quad \text{за } n \geqslant 1,$$

и

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{2020}{n} b_n + b_{n-1} \quad \text{за } n \geqslant 1.$$

Доказати:

$$\frac{a_{1010}}{1010} = \frac{b_{1009}}{1009}.$$

(Душан Ђукић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. За $n \leqslant 28$ услов задатка је задовољен само за $n \in \{2,4,10\}$. Нека је $n > 28$.

Приметимо да је низ a_i симетричан у односу на $\frac{n}{2}$. Дакле, $a_i + a_{k+1-i} = n$.

Ако $2 \nmid n$, онда је $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $3 \mid a_1 + a_2$. С друге стране, ако $3 \mid n$, одаберимо i тако да је $a_i < \frac{n}{2} < a_{i+1}$: тада $3 \mid a_i + a_{i+1} = n$. Надаље $2 \mid n$ и $3 \nmid n$, тако да је $a_2 = 3$. Одавде имамо и $a_{k-1} = n-3$ и $a_k = n-1$.

Ако је $n \equiv 2 \pmod 3$, онда $3 \mid a_{k-1} + a_k = 2n-4$. Остаје само случај $n \equiv 1 \pmod 3$.

Даље, ако је $a_i + a_{i+1} \equiv 2 \pmod 3$, онда је $a_{k-i} + a_{k+1-i} = 2n - (a_i + a_{i+1}) \equiv 0 \pmod 3$. Зато можемо да сматрамо да је $a_i + a_{i+1} \equiv 1 \pmod 3$ за $i = 1,2,\dots,k-1$. Индукцијом налазимо

$$a_1 \equiv a_3 \equiv \cdots \equiv 1 \quad \text{и} \quad a_2 \equiv a_4 \equiv \cdots \equiv 0 \pmod 3. \tag{$*$}$$

Како је $(n,9)=1$, следи $a_4 = 9$, а због $a_3 \equiv 1 \pmod 3$ имамо и $a_3 = 7$. Одавде добијамо $(n,7)=1$ и $(n,5) \neq 1$, тј. $5 \mid n$.

Сада имамо $(n,21) = (n,27) = 1$, али бројеви 22, 24, 25 и 26 нису узајамно прости са n, а на основу $(*)$ ни број 23 се не може појавити у низу $a_1,\dots,a_k$. Дакле, 21 и 27 су суседни у низу $a_1,\dots,a_k$, али $3 \mid 21+27$, контрадикција.

Према томе, једина решења су 2, 4 и 10.

2. **(а)** Довољно је доказати да је сваки нормиран низ $a_1,a_2,\dots,a_{2n+1}$ уложив у неки интервал дужине $2-\frac{1}{2^n}$. Тврђење доказујемо индукцијом по n. Оно је тачно за $n=0$; нека је $n \geqslant 1$. По индуктивној претпоставци постоји низ $x_0,x_1,\dots,x_{2n-1} \in [0,2-\frac{1}{2^{n-1}}]$ такав да је $|x_i - x_{i-1}| = a_i$ за $i = 1,\dots,2n-1$. Не умањујући општост, сматраћемо да је $x_{2n-1} \leqslant 1-\frac{1}{2^n}$.

(1°) Ако је $a_{2n} \geqslant \frac{1}{2^n}$, можемо узети $x_{2n} = x_{2n-1} + a_{2n} \in [1, 2-\frac{1}{2^n}]$ и $x_{2n+1} = x_{2n} - a_{2n+1} \in [0,2-\frac{1}{2^n}]$, чиме је низ уложен у интервал $[0,2-\frac{1}{2^n}]$.

(2°) Ако је $a_{2n} < \frac{1}{2^n}$, узећемо $x_{2n} = x_{2n-1} - a_{2n} \in [-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^n}]$ и $x_{2n+1} = x_{2n} + a_{2n+1}$, чиме је низ уложен у један од интервала $[0,2-\frac{1}{2^n}]$ и $[-\frac{1}{2^n}, 2-\frac{1}{2^{n-1}}]$.

(б) Означимо $N = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. Доказаћемо да се низ дужине $4n-1$

$$1,\ 1-\frac{1}{N},\ 1,\ 1-\frac{2}{N},\ 1,\ 1-\frac{2^2}{N},\ \dots,\ 1,\ 1-\frac{2^{n-1}}{N},\ 1,\ 1-\frac{2^{n-2}}{N},\ 1,\ \dots,\ 1-\frac{2}{N},\ 1,\ 1-\frac{1}{N},\ 1$$

не може уложити у интервал $(-1+\frac{1}{2N}, 1-\frac{1}{2N})$, одакле следи тврђење.

Претпоставимо супротно. Једноставном индукцијом се доказује да је:

(i) $|x_{2i}| < 1-\frac{2^{i+1}-1}{2N}$ и $|x_{2i+1}| > \frac{2^{i+1}-1}{2N}$ за $i = 0,\dots,n$;

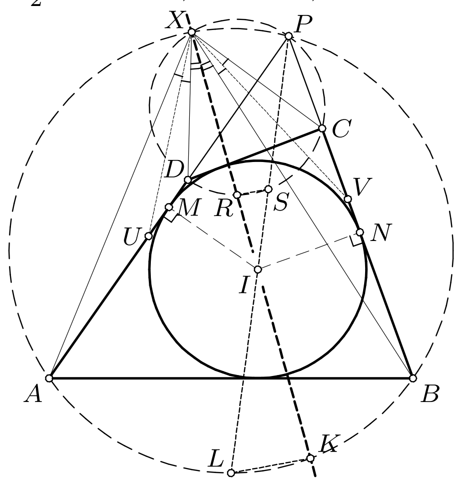
(ii) $|x_{2i}| < \frac{2^{2n+2-i}-1}{2N}$ и $|x_{2i+1}| > 1-\frac{2^{2n+2-i}-1}{2N}$ за $i = n+1,\dots,2n+1$.

Тако за x_{4n+3} добијамо контрадикцију.

3. Пошто је $\sphericalangle XAD = \sphericalangle XBC$ и $\sphericalangle XDP = \sphericalangle XCP$, важи $\triangle XAD \sim \triangle XBC$.

Нека симетрала s_X угла AXC сече кругове PAB и PCD у тачкама K и R, а симетрала s_P угла APC сече кругове PAB и PCD у тачкама L и S. Права s_P пролази кроз центар I круга k и важи $LA = LB = LI$ и $SC = SD = SI$.

Како је $\sphericalangle ILK = \sphericalangle PXK = \sphericalangle PXR = \sphericalangle ISR$, важи $KL \parallel RS$. Даље, имамо $\sphericalangle RXS = \sphericalangle RXC - \sphericalangle SPC = \frac{1}{2}(\sphericalangle AXC - \sphericalangle APC) = \frac{1}{2}\sphericalangle BXC$ и, слично, $\sphericalangle LXK = \frac{1}{2}\sphericalangle BXC$. Следи да тетивама KL и RS у круговима PAB и PCD, као и тетивама LB и SD, одговарају једнаки периферијски углови, па је $\frac{KL}{RS} = \frac{LB}{SD} = \frac{LI}{SI}$. Следи да је $\triangle IKL \sim \triangle IRS$, па тачка I лежи на правој KR, што је симетрала угла AXC. Тврђење задатка одмах следи.



<u>*Друго решење.*</u> Означимо са U и V редом пресеке симетрала углова AXD и BXC са AD и BC. Као и у првом решењу, $\triangle XAD \sim \triangle XBC$, одакле је $\sphericalangle XUP = \sphericalangle XVP$, па тачке X, P, U и V леже на истом кругу γ. Доказаћемо да је и тачка I на овом кругу и да је $IU = IV$. Следиће да I припада симетрали угла UXV, што је уједно и симетрала угла AXC.

Нека су M и N редом тачке додира круга k са страницама AD и BC. Означимо $AM = a$, $BN = b$, $CN = c$ и $DM = d$. Тада је $AB = a + b$, $CD = c + d$ и $AU : UD = (a{+}b) : (c{+}d)$, одакле налазимо $AU = \frac{a+b}{a+b+c+d} \cdot AD = \frac{(a+b)(a+d)}{a+b+c+d}$; слично имамо $BV = \frac{(b+a)(b+c)}{a+b+c+d}$. Следи да је $AM - AU = BV - BN = \frac{ac-bd}{a+b+c+d}$, па је $MU = NV$ и троуглови IMU и INV су подударни и исто оријентисани. Према томе, $IU = IV$ и $\sphericalangle UIV = \sphericalangle MIN = 180^\circ - \sphericalangle VPU$, тј. I је средиште лука UV круга $PXUV$.

<u>*Треће решење.*</u> Познато је следеће тврђење из пројективне геометрије.

- <u>*Дезаргова теорема о инволуцији.*</u> Коника γ је описана око четвороугла $ABCD$. Права ℓ сече AB, CD, BC, DA, AC, BD редом у тачкама X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, и сече конику γ у W_1 и W_2. Тада постоји инволуција на правој ℓ која слика $X_1 \leftrightarrow X_2$, $Y_1 \leftrightarrow Y_2$, $Z_1 \leftrightarrow Z_2$ и $W_1 \leftrightarrow W_2$.

Дуално тврђење (добијено поларним пресликавањем у односу на γ) гласи овако:

- Коника γ је уписана у четвороугао $ABCD$ у коме је $AD \cap BC = \{P\}$ и $AB \cap CD = \{Q\}$. Праве XU и XV су тангенте из произвољне тачке X на γ. Тада постоји инволуција на прамену правих кроз X која слика $XA \leftrightarrow XC$, $XB \leftrightarrow XD$, $XP \leftrightarrow XQ$ и $XU \leftrightarrow XV$.

У нашем случају углови AXC, BXD и PXQ имају заједничку симетралу s, па је поменута инволуција управо осна симетрија у односу на s. Следи да су две тангенте из X на круг (конику) k симетричне у односу на s.

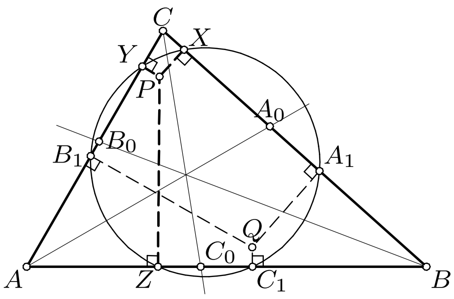
4. Подсетимо се да тачке P и Q унутар $\triangle ABC$ зовемо *изогонално спрегнутим* ако је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAC$ и $\sphericalangle PBC = \sphericalangle QBA$. Тада такође важи $\sphericalangle PCA = \sphericalangle QCB$.

Лема. Подножја нормала из тачака P и Q на праве BC, CA и AB леже на истом кругу.

Доказ. Нека су P_a и Q_a редом подножја нормала из P и Q на BC; аналогно означавамо P_b, Q_b, P_c, Q_c. Из $\sphericalangle AP_bP_c = \sphericalangle APP_c = \sphericalangle AQQ_b = \sphericalangle AQ_cQ_b$ следи $\triangle AP_bP_c \sim \triangle AQ_cQ_b$, па су тачке P_b, P_c, Q_b, Q_c на истом кругу k, а његов центар је пресек симетрала дужи P_bQ_b и P_cQ_c, што је управо средиште U дужи PQ. Аналогно, и тачке P_c, P_a, Q_c, Q_a су једнако удаљене од тачке U, па и P_a и Q_a леже на кругу k.

Претпоставимо да се нормале из X, Y и Z редом на BC, CA и AB секу у тачки P. Ако је тачка Q изогонално спрегнута тачки P у $\triangle ABC$, подножја нормала из Q на BC, CA и AB су по Леми управо тачке A_1, B_1 и C_1.

Означимо са A_0, B_0 и C_0 редом пресеке унутрашњих симетрала углова код A, B и C с наспрамним страницама. Уобичајено, $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$. Из односа $BA_0 : A_0C = c : b$ налазимо $BA_1 = A_0C = \frac{ab}{b+c}$ и, слично, $A_1C = \frac{ac}{b+c}$, $CB_1 = \frac{bc}{c+a}$, $B_1A = \frac{ba}{c+a}$, $AC_1 = \frac{ca}{a+b}$ и $C_1B = \frac{cb}{a+b}$. Сада имамо



$$\begin{aligned}
0 &= (BA_1^2 - A_1C^2) + (CB_1^2 - B_1A^2) + (AC_1^2 - C_1B^2) \\
&= \frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} \\
&= \frac{a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) - (b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)}{(b+c)(c+a)(a+b)} \\
&= -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2}{(b+c)(c+a)(a+b)},
\end{aligned}$$

одакле следи $a = b$ или $a = c$ или $b = c$.

Друго решење. Као у првом решењу, $BA_1 = A_0C = \frac{ab}{b+c}$, $A_1C = \frac{ac}{b+c}$, $CB_1 = \frac{bc}{c+a}$, $B_1A = \frac{ba}{c+a}$, $AC_1 = \frac{ca}{a+b}$ и $C_1B = \frac{cb}{a+b}$. Означимо $BX = x$, $CY = y$ и $AZ = z$. Потенција тачке A даје $AB_1 \cdot AY = AC_1 \cdot AZ$, тј. $\frac{by}{c+a} + \frac{cz}{a+b} = \frac{b^2}{c+a}$. Слично добијамо $\frac{cz}{a+b} + \frac{ax}{b+c} = \frac{c^2}{a+b}$ и $\frac{ax}{b+c} + \frac{by}{c+a} = \frac{a^2}{b+c}$. Одавде следи $\frac{2ax}{b+c} = \frac{a^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+b} - \frac{b^2}{c+a}$ што се своди на $x = \frac{1}{2}a - \frac{(b+c)(b-c)(b^2+c^2+ab+ac+bc)}{2a(a+b)(a+c)}$, итд. Услов да су три нормале конкурентне је

$$\begin{aligned}
0 &= (a+b)(a+c)(b+c)[x^2 - (a-x)^2 + y^2 - (b-y)^2 + z^2 - (c-z)^2] \\
&= (b+c)^2(c-b)(T-a^2) + (c+a)^2(a-c)(T-b^2) + (a+b)^2(b-a)(T-c^2) \\
&= a^2(b+c)^2(b-c) + b^2(c+a)^2(c-a) + c^2(a+b)^2(a-b) - (a-b)(b-c)(c-a)T \\
&= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2,
\end{aligned}$$

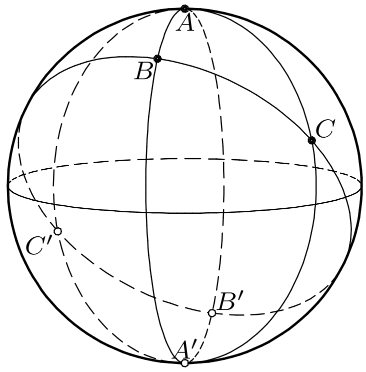
где је $T = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.

5. Одговор је $n \leqslant 3$.

Пумпу дијаметрално супротну пумпи X означаваћемо са X'.

За $n \leqslant 1$ тврђење је тривијално. Нека је $n=2$ и нека је $AB = A'B'$ најмање међу свим растојањима између две пумпе. Од пумпе A до A' се може стићи, рецимо путем $AB'A'$ (случај пута ABA' је сличан), али у B има довољно бензина за вожњу до њој најближе пумпе A, те је путања $BAB'A'$ могућа.

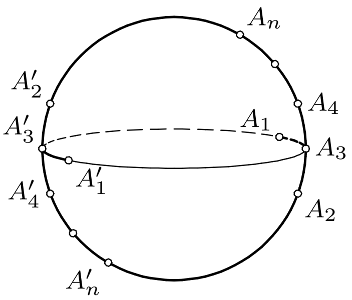
Покажимо тврђење за $n=3$ и шест пумпи A, A', B, B', C, C'. Нека је $AB = A'B'$ најмање међу растојањима између две пумпе и нека је B пумпа најближа пумпи C. Означимо $S = \{A, B, C\}$ и $S' = \{A', B', C'\}$. Полазећи из сваке пумпе једног скупа можемо стићи до другог скупа.



(1°) Претпоставимо да се из пумпе A путем AB не може отићи у скуп S'. До S' се не може стићи ни путем AC - иначе би могло и путем ABC, јер је $BC \leqslant AC$, а у B има довољно бензина да надокнади утрошак на путу AB. Дакле, полазећи из пумпе A, до S' можемо стићи само директно. Најближа тачка скупа S' је C', па је цела путања $CBAC'B'A'$ могућа. Случај када се из A' путем $A'B'$ не може стићи до S је аналоган.

(2°) Ако не важи случај (1°), кренимо из A право у B. Како нам је скуп S' у домету, а $BC \leqslant d(B, S') = BC'$, из B можемо продужити у C. Ту ћемо надокнадити бензин потрошен на путу BC, а $d(C, S') = CA' < d(B, S')$, па још увек можемо у S', и то у пумпу A'. Даље се може ићи у B' и одатле (као малопре) у C'. Добијамо путању $ABCA'B'C'$.

Остаје да конструишемо контрапример за $n \geqslant 4$. Сматраћемо да је полуобим лопте 1. Распоредимо пумпе $A_2, A_3, \dots, A_n$ по великом кругу тако да је $A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{n-1}A_n = d < \frac{1}{n-1}$ и пумпу A_1 тако да је $A_1A_3 = d$ и $A_1A_2 = A_1A_4$. Опет означавамо $S = \{A_1, \dots, A_n\}$ и $S' = \{A'_1, \dots, A'_n\}$. Снабдимо пумпе $A_1, A'_1, \dots, A_{n-1}, A'_{n-1}$ бензином довољним за прелазак раздаљине d, а пумпе A_n и A'_n бензином за прелазак раздаљине $1-(n-1)d$. Из сваке пумпе се може стићи до дијаметрално супротне: заиста, за $2 \leqslant i \leqslant n$ могућа је путања $A_iA_{i+1}\dots A_nA'_2A'_3\dots A'_i$, а могућа је и путања $A_1A_3A_4\dots A_nA'_2A'_3A'_1$. С друге стране, у свакој од пумпи $A_1, \dots, A_{n-1}$ има тек толико бензина да се дође до најближе пумпе, а у A_n и A'_n таман довољно за прелаз у други скуп. Зато, да би се обишле све пумпе, бар један од скупова, рецимо S, морао би се обићи цео без коришћења горива у A_n, али за то је потребно прећи пут дужи од $(n-1)d$, а бензина има само за пут дужине $(n-1)d$.



6. Дефинишимо низ $(c_{m,n})$ $(m, n \in \mathbb{N}_0)$ условима

$$c_{m,0} = 0, \quad c_{m,1} = 1, \quad c_{m,n+1} = \frac{2m}{n} c_{m,n} + c_{m,n-1} \text{ за } n \geqslant 1. \qquad (*)$$

Тада је $a_n = c_{1010,n}$ и $b_n = c_{1009,n}$.

Видимо да је нпр. $c_{1,n} = n$, $c_{2,n} = n^2$ и $c_{3,n} = \frac{2n^3+n}{3}$. Тврдимо да за свако $m \in \mathbb{N}$ постоји моничан полином $P_m(x)$ такав да је

$$P_m(x+1) = \frac{2m}{x} P_m(x) + P_m(x-1); \tag{1}$$

пошто је очигледно $P_m(0) = 0$, индукцијом ће следити $c_{m,n} = P_m(n)/P_m(1)$.

Лема. Дефинишимо низ полинома P_k условима $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = x$ и

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) + \frac{k(k-1)}{4} \cdot P_{k-1}(x). \tag{2}$$

Тада полиноми P_k задовољавају (1).

Шта више, важи $P_k(x+1) - 2P_k(x) + P_k(x-1) = \frac{k(k-1)}{x} \cdot P_{k-1}(x)$.

Доказ. Ако означимо

$$\begin{aligned}
A_k(x) &= P_{k+1}(x) - xP_k(x) - \tfrac{k(k-1)}{4} P_{k-1}(x) \ \equiv \ 0, \\
B_k(x) &= P_k(x+1) - 2P_k(x) + P_k(x-1) - \tfrac{k(k-1)}{x} P_{k-1}(x), \\
C_k(x) &= P_k(x+1) - P_k(x-1) - \tfrac{2k}{x} P_k(x)
\end{aligned}$$

и претпоставимо да је $B_i(x) \equiv C_i(x) \equiv 0$ за све $i \leqslant k$, тада је

$$\begin{aligned}
&B_{k+1}(x) - xB_k(x) - \tfrac{k(k-1)}{4} B_{k-1}(x) = \\
&C_k(x) + A_k(x+1) + A_k(x-1) - 2A_k(x) - \tfrac{k(k-1)}{x} A_{k-1}(x) \ = \ 0,
\end{aligned}$$

па је $B_{k+1} \equiv 0$. С друге стране,

$$\begin{aligned}
&C_{k+1}(x) - xC_k(x) - \tfrac{k(k-1)}{4} C_{k-1}(x) = \\
&B_k(x) + A_k(x+1) - A_k(x-1) - \tfrac{2(k+1)}{x} A_k(x) \ = \ 0,
\end{aligned}$$

па је и $C_{k+1} \equiv 0$. $\square$

Из (2) следи да полиноми $Q_0(x) = 0$ и $Q_k(x) = \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} P_k(x)$ задовољавају везу $Q_{k+1}(x) = \frac{2x}{k} Q_k(x) + Q_{k-1}(x)$, па индукцијом добијамо $Q_k(x) = xc_{x,k}$ за све $x \in \mathbb{N}$. Одавде је $P_k(x) = \frac{(k-1)!}{2^{k-1}} \cdot xc_{x,k}$ и

$$\frac{c_{m,n}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{P_m(n)}{P_m(1)} = \frac{c_{n,m}}{c_{1,m}} = \frac{c_{n,m}}{m}.$$

Тврђење задатка се добија за $m = 1010$ и $n = 1009$.

Друго решење. За дато $m \geqslant 0$ посматрајмо генераторску функцију низа $c_{m,n}$ датог условима $(*)$:

$$f_m(x) = \frac{1}{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{m,n}}{n} x^n.$$

Из рекурентне везе $(*)$ следи да функција f_m задовољава диференцијалну једначину $(1-x^2)f'_m(x) = 2m \cdot f_m(x)$. Ова једначина се лако решава: ако је запишемо као $\frac{f'_m(x)}{f_m(x)} = \frac{2m}{1-x^2}$, интеграција по x даје $\ln|f_m(x)| = \int \frac{2m}{1-x^2}\,dx =$

$m\ln\frac{1+x}{1-x}+\text{const}$, тј. $f_m(x)=C\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m$. Услов $f_m(0)=\frac{1}{2m}$ најзад даје $C=1$, те је

$$f_m(x)=\frac{1}{2m}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m=\frac{1}{2m}(1+x)^m(1-x)^{-m}=$$
$$=\frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\binom{m-1+j}{m-1}x^j.$$

Коефицијент уз x^n је

$$\frac{c_{m,n}}{n}=\frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{m+n-1-i}{m-1}=\frac{1}{2}\sum_{i}\frac{(m+n-1-i)!}{i!\,(m-i)!(n-i)!}$$

Овај израз је симетричан по m и n, па је $\frac{c_{m,n}}{n}=\frac{c_{n,m}}{m}$.