Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

13. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. април 2019.

Први дан

1. Одредити све природне бројеве n, $n > 1$, који имају следеће својство: ако су $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ сви природни бројеви мањи од n и узајамно прости са n, и важи поредак $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$, онда ниједан од збирова $a_i + a_{i+1}$ за $i = 1, 2, \ldots, k-1$ није дељив са 3.

2. За низ ненегативних реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_k$ кажемо да је *уложив* у интервал $[b, c]$ ако постоје бројеви $x_0, x_1, \ldots, x_k$ из интервала $[b, c]$ такви да важи $|x_i - x_{i-1}| = a_i$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Низ је *нормиран* ако су сви његови чланови не већи од 1. За задат природан број n, доказати:

a) сваки нормиран низ дужине $2n + 1$ је уложив у интервал $[0, 2-\frac{1}{2^n}]$.

b) постоји нормиран низ дужине $4n + 3$ који није уложив у $[0, 2-\frac{1}{2^n}]$.

3. Конвексан четвороугао $ABCD$ је описан око кружнице k. Праве AD и BC се секу у тачки P, а кружнице описане око $\triangle PAB$ и $\triangle PCD$ се секу у тачки X. Доказати да тангенте из тачке X на кружницу k граде једнаке углове са правима AX и CX.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

13. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. април 2019.

Други дан

4. Дат је $\triangle ABC$. Нека је A_1 централносиметрична слика пресечне тачке симетрале $\measuredangle BAC$ и странице BC, где је центар симетрије средина странице BC. Аналогно дефинишемо тачке B_1 (на страници CA) и C_1 (на страници AB). Пресек кружнице описане око $\triangle A_1B_1C_1$ с правом AB је скуп $\{Z, C_1\}$, с правом BC је скуп $\{X, A_1\}$, а с правом CA је скуп $\{Y, B_1\}$. Ако се нормале из тачака X, Y и Z на BC, CA и AB, респективно, секу у једној тачки, доказати да је $\triangle ABC$ једнакокрак.

5. На планети X облика лопте се налази $2n$ бензинских пумпи. Притом је свака пумпа упарена с по једном другом пумпом, и сваке две упарене пумпе се налазе на дијаметрално супротним тачкама планете. На свакој пумпи се налази одређена количина бензина. Познато је следеће: уколико аутомобил с претходно празним (довољно великим) резервоаром крене с ма које пумпе, увек може стићи до пумпе с њом упарене (уз могуће допуњавање бензина на другим пумпама током пута). Одредити све природне бројеве n такве да, за ма какав распоред $2n$ пумпи који испуњава наведени услов, увек постоји пумпа од које аутомобил може кренути с претходно празним резервоаром и обићи све остале пумпе на планети. (Сматрати да аутомобил троши константну количину бензина по јединици дужине.)

6. Низови $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ дефинисани су рекурентним релацијама

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2018}{n}a_n + a_{n-1} \text{ за } n \geqslant 1,$$

и

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{2020}{n}b_n + b_{n-1} \text{ за } n \geqslant 1.$$

Доказати:

$$\frac{a_{1010}}{1010} = \frac{b_{1009}}{1009}.$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.