11-то такмичење „Румунски мастер из математике“

Први дан: Букурешт - петак, 22. фебруар 2019.

Language: Serbian

1. задатак. Анка и Бранка играју игру. На почетку Анка записује на таблу неки природан број. Потом оне играју наизменично, при чему Бранка игра прва. У сваком свом потезу Бранка бира природан број b и замењује број n на табли бројем $n - b^2$. У сваком свом потезу Анка бира природан број k и замењује број n на табли бројем n^k. Бранка побеђује ако се на табли појави нула. Може ли Анка да је спречи да победи?

2. задатак. У једнакокраком трапезу $ABCD$ у коме је $AB \parallel DC$, тачка E је средиште дијагонале AC. Означимо са Γ и Ω редом описане кружнице троуглова ABE и CDE. Тангента у A на Γ и тангента у D на Ω секу се у тачки P. Доказати да је PE тангента на кружницу Ω.

(Трапез $ABCD$ у коме је $AB \parallel DC$ је *једнакокрак* ако је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA$.)

3. задатак. Нека је ε позитиван реалан број. Доказати да за све природне бројеве n осим коначно много њих важи да сваки прост граф са n темена и барем $(1+\varepsilon)n$ грана садржи два различита проста циклуса исте дужине.

(*Прост граф* је скуп темена V заједно са скупом грана E, где је свака грана у E скуп два темена из V. *Прост циклус дужине* k је скуп C са $k \geqslant 3$ различитих грана из E за који постоји низ различитих темена $v_1, v_2, \ldots, v_k$ такав да је $\{v_i, v_{i+1}\} \in C$ за $1 \leqslant i < k$ и $\{v_k, v_1\} \in C$.)

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сата.

11-то такмичење „Румунски мастер из математике“

Други дан: Букурешт - субота, 23. фебруар 2019.

Language: Serbian

4. задатак. Доказати да за сваки природан број n постоји многоугао (не обавезно конвексан) у коме никоја три темена нису колинеарна и који има тачно n различитих триангулација.

(*Триангулација* многоугла је његово растављање на троуглове помоћу унутрашњих дијагонала које немају заједничких унутрашњих тачака једна с другом нити са страницама многоугла.)

5. задатак. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2019y)$$

за све реалне бројеве x и y.

6. задатак. Наћи све парове (c, d) природних бројева већих од 1 са следећим својством:

За сваки моничан полином Q степена d са целим коефицијентима и сваки прост број $p > c(2c+1)$ постоји скуп S са највише $\left(\frac{2c-1}{2c+1}\right)p$ целих бројева такав да скуп

$$\bigcup_{s \in S} \{s,\, Q(s),\, Q(Q(s)),\, Q(Q(Q(s))),\, \ldots\}$$

садржи потпун систем остатака по модулу p (тј. сече сваку класу остатака по модулу p).

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сата.