ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА ТАКМИЧЕЊУ
„Romanian Master of Mathematics”

26. јануар 2019.

1. Нека је n природан број. Доказати да збир свих позитивних делилаца броја $n!$ (укључујући 1 и $n!$) није већи од $\frac{1}{2}(n+1)!$.

2. Низ природних бројева $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ је такав да важи

$$a_{n+2} = \left[\frac{2a_n}{a_{n+1}}\right] + \left[\frac{2a_{n+1}}{a_n}\right]$$

за све $n \geqslant 1$. Доказати да за неко n важи $a_n = 4$ и $a_{n+1} \in \{3, 4\}$.

3. Посматрајмо скуп

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}^i(\varnothing),$$

при чему $\mathcal{P}(X)$ означава скуп свих подскупова скупа X, а $\mathcal{P}^i(X)$ означава израз $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\ldots\mathcal{P}(X)\ldots))$, где је $\mathcal{P}$ примењено i пута.

За задат природан број n, бројимо колико постоји n-елементних подскупова A скупа U за које важи $A \subseteq \mathcal{P}(A)$. Да ли је могуће да се резултат састоји од цифара 2, 0, 1 и 8 у некој пермутацији?

4. У неједнакокраком троуглу ABC тачка H је ортоцентар, а G тежиште. Тачке X, Y и Z су одабране редом на страницама BC, CA и AB тако да је $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BYC = \sphericalangle CZA$. Описани кругови троуглова BXZ и CXY секу се у тачки $P \neq X$. Доказати да је $\sphericalangle GPH = 90^\circ$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

РЕШЕЊА

1. Познато је да је збир делилаца броја $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ једнак

$$\sigma(m) = \prod_{i=1}^{k}(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{r_i}) < \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1} = m \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

За $m = n!$ важи $p_1 = 2$ и $p_i \leqslant 2i - 1$ за $2 \leqslant i \leqslant k \leqslant \frac{n+2}{2}$. За $n > 10$ имамо

$$\frac{\sigma(n!)}{n!} \leqslant \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \prod_{i=4}^{k} \frac{2i-1}{2i-2} \leqslant \frac{15}{4} \prod_{i=4}^{k} \frac{i+3}{i+2} = \frac{15}{4} \cdot \frac{k+3}{6} \leqslant \frac{15}{4} \cdot \frac{n+8}{12} < \frac{n+1}{2}.$$

Тврђење важи и за $n \leqslant 10$: $\frac{\sigma(2!)}{2!} = \frac{3}{2}$, $\frac{\sigma(3!)}{3!} = 2$, $\frac{\sigma(4!)}{4!} = \frac{5}{2}$, $\frac{\sigma(5!)}{5!} = 3$, $\frac{\sigma(6!)}{6!} = \frac{403}{120} < \frac{7}{2}$, $\frac{\sigma(7!)}{7!} = \frac{403}{105} < 4$, $\frac{\sigma(8!)}{8!} = \frac{221}{56} < \frac{9}{2}$, $\frac{\sigma(9!)}{9!} = \frac{2057}{504} < 5$ и $\frac{\sigma(10!)}{10!} = \frac{273823}{64800} < \frac{11}{2}$.

2. За почетак приметимо да је $a_{n+2} > \frac{2a_{n+1}}{a_n} + \frac{2a_n}{a_{n+1}} - 2 \geqslant 2$ по неједнакости између средина, па је $a_k \geqslant 3$ за све $k \geqslant 3$.

Ако је $a_n = a_{n+1} = 3$, онда је $a_{n+2} = 4$ и $a_{n+3} = 3$, а ако је $a_n = 3$ и $a_{n+1} = 4$, онда је $a_{n+2} = 3$. Овим је тврђење проверено ако је $\max\{a_n, a_{n+1}\} \leqslant 4$ за неко n.

Претпоставимо да је $\max\{a_n, a_{n+1}\} > 4$ за све n. Нека су a_n и a_{n+1} једнаки x и y неким редом, где је $x \geqslant y \geqslant 3$ и $x \geqslant 5$.

(1°) Ако је $x = y$, онда је $a_{n+2} = 4$.

(2°) Ако је $x > y$, онда је $a_{n+2} = [\frac{2x}{y}] + [\frac{2y}{x}] = [\frac{2x}{y}] + 1 \leqslant \frac{2}{3}x + 1 < x$.

Даље је $a_{n+3} < \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \leqslant x$, па је $\max\{a_{n+2}, a_{n+3}\} < \max\{a_n, a_{n+1}\}$ за $n \geqslant 3$. Следи да низ $\max\{a_{2k+1}, a_{2k+2}\}$ вечно опада, што је немогуће.

3. Нека је $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \in U$ скуп такав да је $A \subset \mathcal{P}(A)$. Притом његове елементе $A_1, \ldots, A_n$ можемо нумерисати тако да $A_i \not\subset A_j$ кад год је $i > j$. За свако $j = 1, \ldots, n$ важи $A_j \in \mathcal{P}(A)$, тј. $A_j \subset A$, што значи да је A_j скуп чији су елементи неки од скупова A_i за $i < j$. Другим речима, $A_1 = \emptyset$ и, за $j \geqslant 2$,

$$A_j = \{A_i \mid i \in M_j\} \quad \text{за неки скуп} \quad M_j \subset \{1, 2, \ldots, j-1\},$$

при чему су скупови $M_2, \ldots, M_n$ међусобно различити.

Дефинишимо $a_j = \sum_{i \in M_j} 2^{i-1}$. Број $a_j < 2^{j-1}$ једнозначно одређује скуп M_j. Како из $A_i \subset A_j$ следи $a_i < a_j$, можемо да сматрамо да је $a_2 < a_3 < \cdots < a_n$. Овако смо конструисали бијекцију између скупова A и низова $a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ таквих да је $a_j < 2^{j-1}$ за свако j.

Означимо са $f(n)$ број свих оваквих низова $a_2 < \cdots < a_n$, а са $f(n,k)$ број оних низова у којима је $a_n = k$. Тада је $f(n,k) = 0$ за $k \geqslant 2^{n-1}$,

$$f(n,k) = \sum_{i=1}^{k-1} f(n-1,i) \text{ за } k < 2^{n-1} \quad \text{и} \quad f(n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(n,k),$$

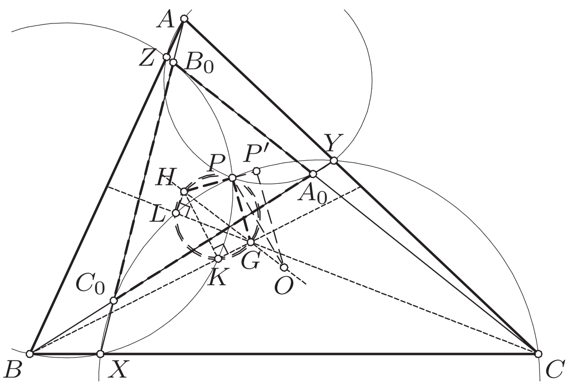
па лако израчунавамо $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 9$, $f(5) = 88$ и $f(6) = 1802$. Дакле, одговор је *да*.

4. По Микеловој теореми, тачка P такође лежи на описаном кругу $\triangle AYZ$.

Означимо са O центар и са R полупречник описаног круга $\triangle ABC$. Такође означимо $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BYC = \sphericalangle CZA = \theta$, $BY \cap CZ = \{A_0\}$, $CZ \cap AX = \{B_0\}$ и $AX \cap BY = \{C_0\}$. Како је $\sphericalangle B_0A_0C_0 = \sphericalangle CA_0Y = 180^\circ - \theta - \sphericalangle ACZ = \sphericalangle BAC$ и слично $\sphericalangle A_0B_0C_0 = \sphericalangle ABC$, следи $\triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle ABC$. Штавише, $\sphericalangle APA_0 = 180^\circ - \sphericalangle AZA_0 = 180^\circ - \theta$ и слично $\sphericalangle BPB_0 = \sphericalangle CPC_0 = 180^\circ - \theta$, па је P центар обртне хомотетије $\mathcal{H}$ која слика $\triangle ABC$ у $\triangle A_0B_0C_0$.

Како је $\sphericalangle BA_0C = \sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$, тачка A_0 припада описаном кругу троугла BHC, а његов полупречник је $\frac{BC}{2\sin\sphericalangle BHC} = \frac{BC}{2\sin\sphericalangle BAC} = R$. Сада из $\sphericalangle HCA_0 = |90^\circ - \theta|$ следи да је $HA_0 = 2R\cos\theta$. Аналогно је $HB_0 = HC_0 = 2R\cos\theta$, што значи да је H центар описаног круга троугла $A_0B_0C_0$, а коефицијент обртне хомотетије $\mathcal{H}$ је $2\cos\theta$.

Обртна хомотетија $\mathcal{H}$ слика тачку O у H, па је $PH = 2PO\cos\theta$. Знамо да тачке H, G, O леже на Ојлеровој правој и $HO = \frac{3}{2}HG$. Нека је P' тачка на полуправој HP таква да је $HP' = \frac{3}{2}HP$. Тада је $PG \parallel P'O$ и $PP' = PO\cos\theta = PO\cos\sphericalangle P'PO$, одакле је $\sphericalangle GPH = \sphericalangle OP'H = 90^\circ$.



<u>*Друго решење.*</u> Посматраћемо подножје K нормале из тачке H на праву BG. Ако је D тачка таква да је $ABCD$ паралелограм, важи $\sphericalangle HAD = \sphericalangle HCD = \sphericalangle HKD = 90^\circ$, па тачка K лежи на кругу $AHCD$. Тачка $CZ \cap AX = \{B_0\}$ такође лежи на овом кругу јер је $\sphericalangle AB_0C = \sphericalangle AXC + \sphericalangle XCB_0 = \sphericalangle CZB + \sphericalangle BCZ = 180^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle AHC$. Сада имамо $\sphericalangle KB_0X = 180 - \sphericalangle KB_0A = \sphericalangle KCA = \sphericalangle KDA = \sphericalangle KBX$, што значи да тачка X лежи на описаном кругу k_b троугла BKB_0. Аналогно је $Z \in k_b$. Дакле, круг k_b се поклапа са описаним кругом $\triangle BXZ$, а на њему је тачка P.

Добили смо да тачка P лежи на кругу BXK. Слично, P је на кругу CXL, где је L подножје нормале из H на CG. Сада по Микеловој теореми у $\triangle BCG$ тачка P такође лежи на кругу GKL, а његов пречник је GH.