Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред – А категорија

1. Нека је K средиште странице AC. Тада је KN средња линија у $\triangle AC_0C$, па важи $KN \parallel AC_0$, тј. $\measuredangle KNH = 90°$. Аналогно добијамо $\measuredangle KMH = 90°$, а знамо и $\measuredangle KB_0H = 90°$. Дакле, кружница над пречником KH пролази кроз тачке N, M и B_0, чиме је тврђење доказано.

2. За $y = -x$, постављени услов се своди на $\lfloor (a-b)x \rfloor + \lfloor (b-a)x \rfloor = 0$. Уколико би бројеви a и b били различити, ово не би било испуњено нпр. за $x = \frac{1}{2(a-b)}$ (тада би важило $\lfloor (a-b)x \rfloor + \lfloor (b-a)x \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = 0 + (-1) = -1 \neq 0$). Дакле, мора важити $a = b$, па услов задатка постаје $\lfloor a(x+y) \rfloor = a\lfloor x+y \rfloor$. Бирајући $0 \leqslant x+y < 1$ добијамо $\lfloor a(x+y) \rfloor = a \cdot 0 = 0$, одакле следи $0 \leqslant a(x+y) < 1$, дакле $a \geqslant 0$.

За $a = 0$ захтев задатка очигледно важи. Претпоставимо сада $a > 0$. Како за $0 \leqslant x + y < 1$ мора важити $\lfloor a(x+y) \rfloor = a\lfloor x+y \rfloor = 0$, тј. $0 \leqslant a(x+y) < 1$, следи $x + y < \frac{1}{a}$; обратно, уколико одаберемо $0 \leqslant x + y < \frac{1}{a}$, постављени услов се своди на $a\lfloor x+y \rfloor = \lfloor a(x+y) \rfloor = 0$, одакле следи $x+y < 1$. Другим речима, услови $0 \leqslant x+y < 1$ и $0 \leqslant x+y < \frac{1}{a}$ су еквивалентни, одакле следи $a = 1$.

Дакле, једина решења су парови $(a, b) = (0, 0)$ и $(a, b) = (1, 1)$.

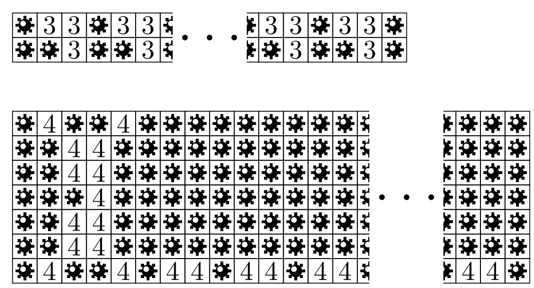
3. Како су четвороуглови $A_1A_2A_3A_8$ и $A_1A_6A_7A_8$ једнакокраки трапези, важи $A_1A_2 \parallel A_3A_8$ и $A_7A_8 \parallel A_6A_1$, одакле следи $A_6A_1 \perp A_3A_8$, тј. A_6A_1 је висина у $\triangle A_3A_6A_8$. Аналогно је A_8A_5 висина тог истог троугла. Коначно, како је тај троугао једнакокрак (са основицом A_6A_8) а A_3A_7 је његова симетрала угла (што следи нпр. из подударности $\triangle A_3A_7A_8 \cong \triangle A_3A_7A_6$, коју добијамо по ставу ССУ), закључујемо да је A_3A_7 такође висина у $\triangle A_3A_6A_8$. Дакле, посматране три дијагонале се секу у једној тачки, конкретно у ортоцентру $\triangle A_3A_6A_8$.

4. Означимо $F = (n-4)(2n+2)(4n+1) = 8n^3 - 22n^2 - 38n - 8$. По услову задатка, и F мора бити потпун куб. Како је F паран број и очигледно важи $F < (2n)^3$, следи $F \leqslant (2n-2)^3 = 8n^3 - 24n^2 + 24n - 8$, што се своди на $2n^2 - 62n \leqslant 0$, а одакле добијамо $n \leqslant 31$. Одмах видимо да је $n = 31$ једно решење ($31 - 4 = 27 = 3^3$, $2 \cdot 31 + n = 64 = 4^3$ и $4 \cdot 31 + 1 = 125 = 5^3$), а директно се испробава да мањих решења нема.

5. a) Одговор: да. Одаберимо $a = 2$ и $b = 2020$, и распоредимо мине као на цртежу горе.

b) Одговор: да. Одаберимо $a = 7$ и $b = 3015$, и распоредимо мине као на цртежу доле. (Објашњење: у првих 6 колона имамо укупно 13 поља без мина. Преосталих 2006 поља без мина су груписана у парове и распоређена у наредних 3009 колона према приказаном обрасцу.)

c) Одговор: не. Према услову задатка, у овом случају би свако поље које нема мину морало имати тачно једног суседа који нема мину. Дакле, сва поља која немају мину на тај начин би се могла груписати у парове, па следи да их укупно не може бити 2019, што је непаран број.

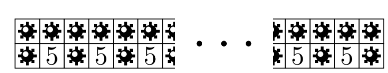


Оп 2019 1А 5

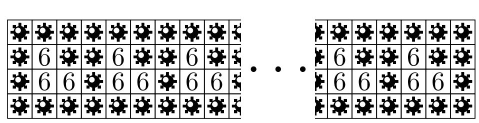
Напомена. Испоставља се да за све бројеве од 1 до 8, са изузетком броја 7, постоји тражени распоред. Доле приказујемо (неке могуће) конструкције за преостале случајеве.

$a = 1,\ b = 3 \cdot 1009 + 2 = 3029$

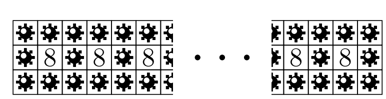
$a = 1,\ b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$



$a = 2,\ b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$



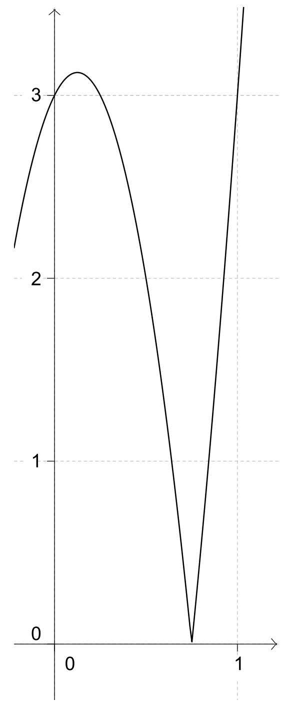
$a = 4,\ b = 2020$



$a = 3,\ b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$

Други разред – А категорија

1. Посматрајмо функцију $f(x)=8x^2-2x-3$. Њене нуле су у тачкама $x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{16}=\frac{2\pm10}{16}$, тј. $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=\frac{3}{4}$, што значи да је функција $f(x)$ на сегменту $[0,1]$ најпре негативна за $x\in[0,\frac{3}{4})$, а потом позитивна за $x\in(\frac{3}{4},1]$. Из особина квадратне функције знамо да се њен минимум достиже у тачки $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$, и тај минимум износи $8\cdot\frac{1}{64}-2\cdot\frac{1}{8}-3=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-3=-\frac{1}{8}-3$; дакле, максимум израза $|f(x)|$ за $x\in[0,\frac{3}{4})$ износи $3+\frac{1}{8}$. За $x\in(\frac{3}{4},1]$ функција $f(x)$ је позитивна и растућа, па достиже максимум за $x=1$, и тај максимум износи $8\cdot1^2-2\cdot1-3=3$; ово је уједно и максимум израза $|f(x)|$ за $x\in(\frac{3}{4},1]$. Дакле, максимална вредност израза из поставке на интервалу $x\in[0,1]$ износи $3+\frac{1}{8}$ и достиже се за $x=\frac{1}{8}$.



Оп 2019 2А 1

2. Не постоји. Претпоставимо супротно, да такав низ постоји. Можемо претпоставити, без умањења општости, да у том низу постоји непаран број: заиста, ако би сви чланови били парни, тада би они сви били дељиви са 4 (јер су потпуни квадрати), па бисмо дељењем свих чланова тог низа са 4 добили нов низ који такође испуњава постављене услове; понављањем поступка по потреби добијамо низ у ком се појављује бар један непаран број.

Подсетимо се, сви непарни квадрати дају остатак 1 при дељењу са 4. Нека је a један непаран члан посматраног низа, и нека су b, c и d наредна три члана. Ако би и b био непаран, тада би c (подсетимо се, $c=a+b$) давао остатак 2 при дељењу са 4 па не би могао бити потпун квадрат, контрадикција. Дакле, b је паран број, а тада је c непаран број, те је и d непаран број. Но, сада из $c,d\equiv 1 \pmod 4$ следи да би наредни члан низа морао давати остатак 2 при дељењу са 4, контрадикција.

3. Нека уписана кружница додирује основицу AB у тачки N. Означимо $x=AM=AN=BN=BK$ и $y=CK=CL=DL=DM$. Нека AL и NL редом секу MK у тачкама X и Q, редом. Како важи $\triangle AXM\sim\triangle ALD$, имамо $\frac{MX}{y}=\frac{MX}{DL}=\frac{AM}{AD}=\frac{x}{x+y}$, тј. $MX=\frac{xy}{x+y}$; како важи $\triangle LXQ\sim\triangle LAN$, уз примену Талесове теореме имамо $\frac{XQ}{x}=\frac{XQ}{AN}=\frac{XL}{AL}=\frac{MD}{AD}=\frac{y}{x+y}$, тј. $XQ=\frac{xy}{x+y}=MX$. Следи $MX=\frac{1}{2}MQ=\frac{1}{4}MK$, тј. $MX:XK=1:3$.

4. Како важи $|z|^2=z\overline{z}$ и $|w|^2=w\overline{w}$, сабирањем датих једнакости добијамо

$$\begin{aligned}4+2i&=z\overline{z}+zw+w\overline{w}+\overline{zw}+z+\overline{w}=z(\overline{z}+w)+\overline{w}(\overline{z}+w)+z+\overline{w}\\&=(z+\overline{w})(\overline{z}+w)+z+\overline{w}=|z+\overline{w}|^2+z+\overline{w}.\end{aligned}$$

Означимо $z+\overline{w}=a+bi$, где $a,b\in\mathbb{R}$. Тада из последње једнакости добијамо $a^2+b^2+a+bi=4+2i$, одакле следи $b=2$ и затим $a^2+a=0$. Дакле, $a=0$ или $a=-1$.

Размотримо прво случај $a=0$. Тада имамо $z+\overline{w}=2i$, па заменом $\overline{w}=2i-z$ и $w=\overline{2i-z}=-2i-\overline{z}$ у прву једначину добијамо

$$2+6i=|z|^2+z(-2i-\overline{z})+2i-z=2i-z(1+2i).$$

Одавде следи $z=\frac{2+4i}{-(1+2i)}=-2$ и $w=2-2i$.

Нека сада важи $a=-1$. Тада имамо $z+\overline{w}=-1+2i$, па заменом $\overline{w}=-1+2i-z$ и $w=\overline{-1+2i-z}=-1-2i-\overline{z}$ у прву једначину добијамо

$$2+6i=|z|^2+z(-1-2i-\overline{z})-1+2i-z=-1+2i-z(2+2i).$$

Одавде следи $z=\frac{3+4i}{-(2+2i)}=\frac{(3+4i)(2-2i)}{-8}=\frac{6-6i+8i+8}{-8}=-\frac{7+i}{4}$ и $w=\frac{3-9i}{4}$.

Дакле, постоје два решења: $(z,w)=(-2,2-2i)$ и $(z,w)=(-\frac{7+i}{4},\frac{3-9i}{4})$.

5. Приметимо, табле $a\times1$ и $1\times b$ представљају специјалне случајеве крстова; такве крстове ћемо звати *штрафте* (вертикалне, респективно хоризонталне). Код осталих крстова пресек двеју табли које га сачињавају називаћемо *центар крста*, и такве крстове ћемо (након уписивања бројева према услову задатка) делити на *хоризонталне*, *вертикалне* или *централне*, у зависности од тога да ли је број 1 уписан, респективно, негде у хоризоналној компоненти али ван центра, негде у вертикалној компоненти али ван центра, или баш у центру.

За задат број n, посматрајмо све крстове попуњене бројевима према услову задатка, и нека је A број хоризонталних штрафти међу њима, B број централних крстова, а C број хоризонталних крстова. Због симетрије, укупан број тражен у поставци износи $2A+B+2C$.

Одредимо најпре број A. Приметимо да је сваки број од 2 надаље уписан у поље или непосредно лево или непосредно десно од блока који чине бројеви пре њега. На тај начин можемо свакој хоризонталној штрафти попуњеној бројевима придружити низ слова L и R дужине $n-1$, а притом је јасно и да из сваког таквог низа можемо једнозначно реконструисати полазну штрафту. Дакле, $A=2^{n-1}$.

Слично рачунамо и број B. Број 1 је уписан у центар, а сваки следећи број је уписан или у горњем, или у десном, или у доњем, или у левом „краку“ (у једнозначно одређеном пољу). Притом, од свих ових могућности треба одузети оне које резултирају хоризонталном или вертикалном штрафтом. Све заједно, добијамо $B = 4^{n-1} - 2A = 4^{n-1} - 2^n$.

Коначно, посматрајмо сада хоризонталне крстове. Нека је у центру број k, $k \neq 1$. Тада су бројеви од 1 до k сви на хоризонтали, па на већ виђен начин израчунавамо да за њих постоји 2^{k-1} могућности; за наредних $n-k$ бројева слично као раније видимо да постоји 4^{n-k} могућности од којих треба одузети оне када су сви ови бројеви поређани на хоризонтали, што је 2^{n-k} распореда. Све заједно, ако је у центру број k, укупан број могућности тада износи $2^{k-1}(4^{n-k} - 2^{n-k})$.

Сада имамо све што је неопходно да приведемо рачун крају:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 2^n + (4^{n-1} - 2^n) + 2\left(\sum_{k=2}^{n} 2^{k-1}(4^{n-k} - 2^{n-k})\right) = 4^{n-1} + 2^n\left(\sum_{k=2}^{n}(2^{n-k} - 1)\right) \\ &= 4^{n-1} + 2^n\left(\sum_{i=0}^{n-2} 2^i - (n-1)\right) = 4^{n-1} + 2^n(2^{n-1} - 1 - n + 1) = 4^{n-1} + 2^n(2^{n-1} - n). \end{aligned}$$

Трећи разред – А категорија

1. Приметимо:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2}{4x^2 - 7x + 3} = \frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2}{4x^2 - 7x + 3} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1}{(4x^2 - 7x + 3)\operatorname{tg} x} = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{(4x - 3)(x - 1)\operatorname{tg} x}.$$

Како важи $3 < \pi < 4$, тј. $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < 1$, израз $(4x-3)(x-1)$, тј. $4(x-\frac{3}{4})(x-1)$, има негативну вредност за x из околине тачке $\frac{\pi}{4}$. С друге стране, $(\operatorname{tg} x - 1)^2$ и $\operatorname{tg} x$ су ненегативни за x из околине тачке $\frac{\pi}{4}$. Према томе, функција $f(x)$ је негативна за x из околине $\frac{\pi}{4}$ и $x \neq \frac{\pi}{4}$. Одговарајући исечак је онај који је дат на слици скроз десно.

2. Посматрајмо тачку P' централносиметричну тачки P у односу на тачку D. Четвороугао $BPCP'$ је паралелограм, па важи $BP' \parallel PQ$. Како је $\triangle ABP'$ једнакокрак (због $BP' = CP = AB$), следи $\measuredangle APQ = \measuredangle AP'B = \measuredangle P'AB = \measuredangle PAQ$, тј. $AQ = PQ$.

3. Докажимо најпре $A_d = B_d$. Довољно је доказати да је придруживање

$$(b_1, b_2, \ldots, b_k) \mapsto (b_1 + b_2 + \ldots + b_k, b_2 + \ldots + b_k, \ldots, b_{k-1} + b_k, b_k)$$

бијекција између скупа k-торки које урачунавамо у B_d и скупа k-торки које урачунавамо у A_d. И заиста, ово лако следи из $n \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_k \geqslant b_2 + \cdots + b_k \geqslant \ldots \geqslant b_{k-1} + b_k \geqslant b_k \geqslant 0$ и

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + (b_2 + \ldots + b_k) + \cdots + (b_{k-1} + b_k) + b_k = b_1 + 2b_2 + \cdots + kb_k = d.$$

Докажимо сада и $B_d = B_{kn-d}$. Показаћемо да је придруживање

$$(b_1, b_2, \ldots, b_k) \mapsto (b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_2, b_1, n - b_1 - \ldots - b_k)$$

бијекција између скупова k-торки које бројимо с леве, односно десне стране. И заиста, ово лако следи из чињенице да сума свих координата у k-торки с десне стране износи $n - b_k$, што јесте не веће од n, и

$$b_{k-1} + 2b_{k-2} + \cdots + (k-1)b_1 + k(n - b_1 - \ldots - b_k) = kn - b_1 - 2b_2 - \cdots - (k-2)b_{k-2} - (k-1)b_{k-1} - kb_k = kn - d.$$

4. Може 99, нпр. за $a_1 = 1$ и $a_i = 2i - 2$ за $i = 2, \ldots, 100$. Тада имамо $b_1 = b_2 = 3$ и $b_i = a_i + 1 = 2i - 1$ за $i \geqslant 3$.

Докажимо сада да међу бројевима b_i увек мора бити бар 99 различитих. Узмимо, без умањења општости, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$. Означимо

$$d_i = \text{НЗД}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{100}).$$

Нека је d_k највећи међу бројевима d_i. Сви бројеви осим можда a_k су дељиви са d_k, па за $j > i$ и $i, j \neq k$ важи $a_j - a_i \geqslant d_k \geqslant d_i$, тј. $b_j > a_j \geqslant b_i$. Дакле, свих 99 бројева b_i за $i \neq k$ су различити.

5. а) Нека је n непаран природан број. Уколико би се он могао представити у облику $p^q + q^r$, тада би морало важити $p = 2$ или $q = 2$. У првом случају имамо $n = 2^q + q^r \equiv 2^q \equiv 2 \pmod{q}$, па ако за n одаберемо број облика $3^k + 2$, за њега би морало важити $q = 3$; одатле би следило $3^k + 2 = 2^3 + 3^r = 8 + 3^r$, тј. $3^{k-1} = 2 + 3^{r-1}$, а одавде имамо $r = 1$, што је немогуће (r мора бити прост број). Дакле, ниједан број облика $3^k + 2$ се не може представити у облику $2^q + q^r$. Размотримо сада случај $q = 2$, тј. $n = p^2 + 2^r$. Тада, због $r \geqslant 2$, важи $n \equiv p^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. Дакле, ниједан број који даје остатак 2 или 3 при дељењу са 4 се не може представити у облику $p^2 + 2^r$.

Приметимо да уколико за n узмемо број облика $9^l + 2$ за произвољан ненегативан цео број l, важи $n = 3^{2l} + 2$ и $n \equiv 1+2 = 3 \pmod 4$, па се он не може представити ни у облику 2^q+q^r, ни у облику p^2+2^r. Како постоји бесконачно много бројева овог облика, овим је тврђење доказано.

b) Сваки природан број облика $4k$ се може представити у облику $2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2$; сваки природан број облика $4k+1$ за $k \geqslant 4$ може се представити у облику $2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 + 2^3 + 3^2$; сваки природан број облика $4k+2$ за $k \geqslant 8$ може се представити у облику $2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2$; сваки природан број облика $4k+3$ за $k \geqslant 12$ може се представити у облику $2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2$. Дакле, постоји само коначно много природних бројева који се не могу представити у облику траженом у поставци задатка.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је S подножје висине из D. Нека су A_1, B_1 и C_1 подножја нормала из S редом на BC, AC и AB. На основу теореме о три нормале и DA_1, DB_1 и DC_1 су нормалне, редом, на BC, AC и AB. Одатле, $\measuredangle DA_1S$, $\measuredangle DB_1S$ и $\measuredangle DC_1S$ су диедарски углови с ивицама BC, AC и AB, па су они, по услову задатка, међусобно подударни; означимо их са θ. Сада по ставу УСУ имамо $\triangle DSA_1 \cong \triangle DSB_1 \cong \triangle DSC_1$ (сви имају заједничку страницу DS, један прав угао, и један угао θ). Одатле следи $SA_1 = SB_1 = SC_1 = r$ (тј. S је центар кружнице уписане у $\triangle ABC$, јер је S унутар $\triangle ABC$) и $DA_1 = DB_1 = DC_1 = h$, а такође и $\frac{r}{h} = \cos\theta$. Сада имамо $\frac{P(\triangle SAB)}{P(\triangle DAB)} = \frac{P(\triangle SAC)}{P(\triangle DAC)} = \frac{P(\triangle SBC)}{P(\triangle DBC)} = \frac{r}{h} = \cos\theta$ (јер су r и h, респективно, висине у одговарајућим троугловима на AB, AC и BC), па следи $P(\triangle SAB) = 15\cos\theta$, $P(\triangle SAC) = 13\cos\theta$ и $P(\triangle SBC) = 14\cos\theta$, а одатле $21 = P(\triangle ABC) = P(\triangle SAB) + P(\triangle SAC) + P(\triangle SBC) = 15\cos\theta + 13\cos\theta + 14\cos\theta = 42\cos\theta$. Добијамо $\cos\theta = \frac{1}{2}$, тј. $\theta = 60°$, и $P(\triangle SAB) = \frac{15}{2}$, $P(\triangle SAC) = \frac{13}{2}$ и $P(\triangle SBC) = 7$.

Из горњих односа следи и $AB : AC : BC = 15 : 13 : 14$ (јер $\triangle SAB$, $\triangle SAC$ и $\triangle SBC$ сви имају висину r, а површине су им у наведеној пропорцији). Означимо $AB = 15x$, $AC = 13x$ и $BC = 14x$. Из Хероновог обрасца имамо $21 = P(\triangle ABC) = \sqrt{21x \cdot 7x \cdot 8x \cdot 6x} = 84x^2$, одакле следи $x = \frac{1}{2}$, тј. нпр. $AB = \frac{15}{2}$. Сада имамо $h = \frac{2P(\triangle DAB)}{AB} = \frac{30}{\frac{15}{2}} = 4$, и онда из $\triangle DSC_1$ добијамо $DS = h\sin\theta = 4\sin 60° = 2\sqrt{3}$. Коначно, запремина тетраедра износи: $V = \frac{DS \cdot P(\triangle ABC)}{3} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 21}{3} = 14\sqrt{3}$.

2. Таква константа не постоји. Претпоставимо супротно: нека је c једна таква константа, и означимо $x_n = cn - (\mathrm{brc}(1) + \mathrm{brc}(2) + \cdots + \mathrm{brc}(n))$. По претпоставци, сваки члан низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је позитиван. Означимо $y_n = x_{n+1} - x_n = c - \mathrm{brc}(n+1)$. Почевши од неког индекса n важи $y_n < 0$, па је од тог индекса низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ опадајући, самим тим, овај низ је ограничен одозго. Како важи $y_n \to -\infty$, а низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је ограничен одозго, важиће и $y_n + x_n \to -\infty$ за $n \to \infty$, али $y_n + x_n = x_{n+1}$, што је контрадикција.

3. Посматрајмо два града, Апатин и Босилеград. Означимо са $\mathscr{A}$ скуп свих градова у које се може стићи из Апатина (не обавезно директно), укључујући и Апатин; нека њих има n. Из сваког града излази 25 линија, али све остају унутар скупа $\mathscr{A}$, тј. ниједна не иде напоље (јер би се у супротном и до тог града ван скупа $\mathscr{A}$ могло стићи из Апатина, па би, по дефиницији скупа $\mathscr{A}$, и тај град био у њему). Дакле, унутар $\mathscr{A}$ укупно има тачно $25n$ линија, али јасно је да их укупно не може бити више од $\binom{n}{2}$, па следи $25n \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, тј. $n \geqslant 51$. Аналогно, скуп $\mathscr{B}$ градова из којих се може доћи до Босилеграда, укључујући и сам Босилеград, има бар 51 елемент. Према томе, скупови $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ имају заједнички елемент, и преко њега се може доћи из Апатина у Босилеград.

4. Означимо $AB = CQ = b$ и $AE = DQ = e$. Из познате особине симетрале угла имамо $\frac{PB}{PE} = \frac{AB}{AE} = \frac{b}{e} = \frac{QC}{QD}$. Нека се XY и PQ секу у тачки R. Тада имамо:

$$\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ} = \frac{e\overrightarrow{RB} + b\overrightarrow{RE}}{b+e} + \frac{e\overrightarrow{RC} + b\overrightarrow{RD}}{b+e} = \frac{e(\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}) + b(\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RD})}{b+e} = \frac{2e\overrightarrow{RX} + 2b\overrightarrow{RY}}{b+e},$$

па како вектор с леве стране лежи на правој PQ, а вектор с десне стране лежи на правој XY, следи да оба та вектора морају бити $\overrightarrow{0}$; другим речима, $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{RQ}$ и $e\overrightarrow{RX} = -b\overrightarrow{RY}$, одакле следи да је R средиште дужи PQ, као и да важи пропорција $\frac{RX}{RY} = \frac{b}{e}$. Сада примећујемо и да су тачке A, T и R колинеарне и да важи $\frac{RT}{TA} = \frac{1}{2}$. Применом Менелајеве теореме на $\triangle AXR$ и праву YZ добијамо:

$$-1 = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XY}}{\overrightarrow{YR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{TA}} = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZX}} \cdot \left(-\frac{b+e}{e}\right) \cdot \frac{1}{2},$$

одакле следи

$$\frac{AZ}{ZX} = \frac{2e}{b+e} = \frac{2AE}{AB+AE}.$$

5. Означимо $S = \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$. Очито важи $S^2 \leqslant 3(b+c+d) \leqslant 3$, те имамо $S \leqslant \sqrt{3}$.
Приметимо, $6M = (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-b)^2$. Притом важи

$$(b-c)^2 = (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 = (b+c+2\sqrt{bc})(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \leqslant 2(b+c)(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \leqslant 2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 = 2b+2c-4\sqrt{bc}$$

и, аналогно, $(c-d)^2 \leqslant 2c+2d-4\sqrt{cd}$ и $(d-b)^2 \leqslant 2d+2b-4\sqrt{db}$, па сабирањем следи

$$a + M \leqslant (1-b-c-d) + \frac{2}{3}(b+c+d-\sqrt{bc}-\sqrt{cd}-\sqrt{db}) \leqslant 1 - \frac{1}{3}(b+c+d+2\sqrt{bc}+2\sqrt{cd}+\sqrt{db}) = 1 - \frac{1}{3}S^2.$$

Остаје доказати неједнакост $\sqrt{1-\frac{1}{3}S^2}+S \leqslant 2$, тј. $\sqrt{1-\frac{1}{3}S^2} \leqslant 2-S$. Након квадрирања остаје $1-\frac{1}{3}S^2 \leqslant 4-4S+S^2$, тј. $4S^2-12S+9 \geqslant 0$, а ово јесте задовољено због $4S^2-12S+9 = (2S-3)^2 \geqslant 0$.

Први разред – Б категорија

1. а) Највећи број који се може саставити од ове четири цифре је 9921; како је он дељив са 3, то је управо тражени одговор.
b) Уколико на прве две позиције слева ставимо две највеће цифре, тј. 99, како $3 \mid 9+9$, закључујемо да на преостале две позиције морају доћи две цифре чији је збир дељив са 3 (како би цео број био дељив са 3), а што оставља могућности 21, 12 и 00. Дакле, 9921, 9912 и 9900 су највећа три четвороцифрена броја дељива са 3 која се могу саставити од понуђених цифара, па следи да четврти највећи број има на другој позицији цифру различиту од 9. Следећа највећа цифра коју можемо ставити на другу позицију је 2, па уколико на трећу позицију ставимо цифру 9 (с циљем да број буде што већи), на четврту позицију онда мора доћи цифра 1 (због дељивости са 3). Дакле, одговор је 9291.

2. Означимо са x укупан број становника на претходном попису 3019. Мушкараца је било $\frac{5}{8}$, а од њих је 10% имало 75 или више година, што чини $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{10}x = \frac{x}{16}$. Жена је било укупно $\frac{3}{8}$, а од њих је 4% имало 75 или више година, што чини $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{100}x = \frac{3x}{200}$. Дакле, укупно је било $\frac{x}{16} + \frac{3x}{200} = \frac{31x}{400}$ особа са 75 или више година. Како овај број представља 7% нове популације, која је за 300 већа од старе, имамо једначину $\frac{31x}{400} = \frac{7}{100}(x+300)$, што се своди на $3x = 8400$, тј. $x = 2800$. Дакле, Горње Зуце је на попису 3019. имало 2800 становника.

3. Постоји. Узмимо нпр. $a = b = 2019{,}9$ и $c = 4039$. Како важи $a + b = 4039{,}8 > c$, постоји троугао са страницама a, b и c. Међутим, имамо $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor = 2019 + 2019 = 4038 < 4039 = \lfloor c \rfloor$, те овако одабрани бројеви a, b и c испуњавају услове задатка.

4. Одговор: 20 недеља. Нека је a почетна количина траве на ливади, а b количина траве која израсте у току једне недеље. Означимо са p и q, редом, количину траве коју у току једне недеље попасе једна бела, односно црна крава. Услове задатка сада можемо превести у једначине $a + 5b = 5(p + 2q)$ и $a + 2b = 2(3p + 4q)$. Из прве једначине следи $p = \frac{a+5b-10q}{5}$, па уврштавањем овога у другу добијамо $a + 2b = 6 \cdot \frac{a+5b-10q}{5} + 8q$, што се своди на $5a + 10b = 6a + 30b - 20q$, тј. $a + 20b = 20q$. Међутим, ово значи управо да је количина траве обезбеђена на ливади током 20 недеља тачно довољна да једна црна крава пасе 20 недеља, чиме је задатак решен.

5. Страну за Весну и Горана можемо изабрати на 2 начина, позицију њих као пара на 3 начина и њихов међусобни распоред на 2 начина, тј. њих можемо распоредити на 12 начина. Ако Ана и Бане седе са супротне стране у односу на Весну и Горана, можемо их распоредити на $12 = 4 \cdot 3$ начина; ако Ана и Бане седе са исте стране као Весна и Горан, можемо их распоредити на 2 начина; ако Ана и Бане седе са различитих страна, тада позицију на страни где су Весна и Горан можемо одабрати на 2 начина, затим ко ће од њих двоје бити на тој позицији на 2 начина, и коначно позицију за другу особу на 3 начина. Дакле, Ану и Банета можемо распоредити на $12 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 26$ начина. За остала 4 госта постоје 4 слободна места, тако да њих можемо распоредити на 4! начина. Коначно, укупан број распореда је $12 \cdot 26 \cdot 4! = 7488$.

Други разред – Б категорија

1. Посматрани израз можемо записати у облику $(2016-3)(2016-1)(2016+1)(2016+3)+16$. Множећи 1. заграду са 4. а 2. са 3. добијамо да је тај израз даље једнак:

$$(2016^2-3^2)(2016^2-1^2)+16 = 2016^4 - 10 \cdot 2016^2 + 9 + 16 = 2016^4 - 10 \cdot 2016^2 + 25 = (2016^2-5)^2,$$

што је и требало доказати.

2. Да би посматрани израз био позитиван за сваки реалан број x, коефицијент уз водећи члан мора бити позитиван, тј. $k > 0$, и дискриминанта мора бити негативна, тј.

$$0 > (4k)^2 - 4k(k^2 + 2k - 3) = -4k^3 + 8k^2 + 12k = -4k(k^2 - 2k - 3) = -4k(k+1)(k-3).$$

Имајући у виду ранији услов $k > 0$, ово се своди на $(k+1)(k-3) > 0$, тј. $k \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$. Будући да нас занимају само позитивне вредности k, коначно решење задатка је $k \in (3, \infty)$.

3. Нека је d растојање од дрвета до бандере, а h висина бандере. Имамо $h : (d+5) = 5 : 5$ и $h : (d+15) = 10 : 15$. Одатле следи $d + 5 = h$ и $d + 15 = \frac{3}{2}h$, па добијамо $h + 10 = \frac{3}{2}h$ и $h = 20$. Дакле, бандера је висока 20 метара.

4. *Прво решење.* Приметимо, ако је (x, y) једно решење посматраног система, онда су решења и парови $(-x, -y)$, (y, x) и $(-y, -x)$. Како систем мора имати тачно два решења, неки од ових парова морају бити једнаки. У случају $(x, y) = (-x, -y)$ добијамо $x = y = 0$, што очигледно није решење. У случају $(x, y) = (-y, -x)$ добијамо $x = -y$, тј. $x + y = 0$, па очигледно ни ово није решење. Дакле, остаје $(x, y) = (y, x)$, тј. $x = y$. Тада се прва једначина своди на $(2x)^2 = 12$, тј. $x = \pm\sqrt{3}(= y)$, а из друге онда добијамо $2(a+1) = 2x^2 = 6$, тј. $a = 2$. Дакле, једина таква вредност параметра a јесте $a = 2$, и тада систем има решења $(x, y) \in \{(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$.

Друго решење. Одузимањем друге једначине од прве добијамо $2xy = 10 - 2a$. У случају $a = 5$ следило би $x = 0$ или $y = 0$, па бисмо уврштавањем овога у прву једначину добили 4 решења: $(x, y) \in \{(0, 2\sqrt{3}), (0, -2\sqrt{3}), (2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)\}$. Дакле, вредност $a = 5$ нам не одговара. Надаље претпостављамо $a \neq 5$. Тада можемо изразити $y = \frac{5-a}{x}$. Уврштавањем овога у другу једначину добијамо $x^2 + (\frac{5-a}{x})^2 = 2(a+1)$, тј. $x^4 - 2(a+1)x^2 + 25 - 10a + a^2 = 0$. Уведимо смену $x^2 = t$. Да би претходна једначина имала тачно два решења за x, једначина након смене: $t^2 - 2(a+1)t + 25 - 10a + a^2 = 0$ мора имати тачно једно решење t, што значи да њена дискриминанта мора бити 0. Дискриминанта износи $4(a+1)^2 - 100 + 40a - 4a^2 = 48a - 96$, па је она једнака нули једино за $a = 2$. Тада имамо $t = \frac{2(a+1)}{2} = 3$ и одатле $x = \pm\sqrt{t} = \pm\sqrt{3}$, а потом и $y = \frac{3}{x} = \pm\sqrt{3}$. Дакле, једина таква вредност параметра a јесте $a = 2$, и тада систем има решења $(x, y) \in \{(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$.

5. Видети решење 5. задатка у првом разреду А категорије, као и напомену после решења.

Трећи разред – Б категорија

1. Важи

$$\sin 80^\circ - \sin 20^\circ + \sin 50^\circ = 2\sin 30^\circ \cos 50^\circ + \sin 50^\circ = \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = 2\sin 45^\circ \cos 5^\circ = \sqrt{2}\sin 85^\circ,$$

па је $n = 85$ једино решење задатка.

2. Нека је N друга тачка пресека посматраних кружница. Довољно је доказати $\measuredangle BNM + \measuredangle CNM = 180^\circ$. И заиста, на основу тетивности четвороуглова $BNMA$ и $NCDM$ имамо

$$\measuredangle BNM + \measuredangle CNM = (180^\circ - \measuredangle BAM) + (180^\circ - \measuredangle CDM) = 360^\circ - (\measuredangle BAM + \measuredangle CDM) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ,$$

што је и требало доказати.

3. Из НЗД$(a, b) = 10$ закључујемо да је 5 највећи непаран заједнички делилац за a и b, па је 5 највећи непаран заједнички делилац и за a и $2b$. Дакле, да бисмо израчунали НЗД$(a, 2b)$, треба још утврдити највећи степен двојке који дели и a и $2b$. Из НЗД$(a, b) = 10$ закључујемо да су бројеви a и b дељиви са 2, али нису оба са 4. С друге стране, из НЗД$(a, b+2) = 12$ закључујемо да је a дељив са 4, па b није дељив са 4. Дакле, a и $2b$ су дељиви са 4, али $2b$ није дељив са 8, па следи НЗД$(a, 2b) = 4 \cdot 5 = 20$.

Слично, из НЗД$(a, b) = 10$ следи да a и b нису истовремено дељиви са 3, а из НЗД$(a, b+2) = 12$ следи да је a дељив са 3, онда b није дељив са 3. Дакле, a и $3b$ су дељиви са 3, али $3b$ није дељив са 9, па из тога и НЗД$(a, b) = 10$ добијамо НЗД$(a, 3b) = 30$.

Дакле, НЗД$(a, 2b) +$ НЗД$(a, 3b) = 20 + 30 = 50$.

4. Страну за Весну и Горана можемо изабрати на 2 начина, позицију њих као пара на 3 начина и њихов међусобни распоред на 2 начина, тј. њих можемо распоредити на 12 начина. Распоредимо сада Ану и Банета. На страни где су Весна и Горан постоје два слободна места, па позицију Ане и Банета можемо одабрати на два начина, а затим и ко ће седети са које стране на два начина. Дакле, њих можемо распоредити на 4 начина. За остала 4 госта постоје 4 слободна места, тако да њих можемо распоредити на 4! начина. Коначно, укупан број распореда је $12 \cdot 4 \cdot 4! = 1152$.

5. a) Помножимо обе стране почетне једнакости са $\log_{2018} 2019$. Користећи формулу $\log_a 2018 \cdot \log_{2018} 2019 = \log_a 2019$ (и слично за $\log_b 2018$ и $\log_c 2018$) одмах добијамо тражену једнакост.

b) Из почетне једнакости следи

$$b^{\log_a 2018+\log_c 2018} = b^{2\log_b 2018} = (b^{\log_b 2018})^2 = 2018^2.$$

Сада одатле добијамо

$$\begin{aligned} a^2 &= (2018^{\log_{2018} a})^2 = (2018^2)^{\log_{2018} a} = (b^{\log_a 2018+\log_c 2018})^{\log_{2018} a} = b^{\log_a 2018\cdot\log_{2018} a+\log_c 2018\cdot\log_{2018} a} \\ &= b^{1+\log_c a} = (b^{\log_b c+\log_b a})^{\log_c b} = (b^{\log_b c}\cdot b^{\log_b a})^{\log_c b} = (ca)^{\log_c b}, \end{aligned}$$

што је и требало показати.

Четврти разред – Б категорија

1. Приметимо, $1+9+0+1+2+0+1+9 = 23$. Да би састављени број био дељив са 9, и његов збир цифара мора бити дељив са 9. Дакле, збир цифара бројева које посматрамо мора износити 9 или 18, тј. неискоришћене цифре у збиру морају давати 14 или 5. Неискоришћених цифара, по услову задатка, може бити највише 4. Приметимо да никоје 4 нити мање од ових цифара не могу давати збир 14 (заиста, у том случају би међу њима морала бити цифра 9, и још највише три цифре које у збиру дају 5, али број 5 се не може добити као збир три од ових цифара). Даље, број 5 се као збир највише четири од ових цифара може добити на једнозначан начин: $2+1+1+1$. Одатле, једини начин да од ових цифара саставимо бар четвороцифрен број дељив са 9 јесте да одбацимо цифре $2, 1, 1, 1$ и број саставимо од преосталих цифара: $9, 9, 0, 0$. На првој позицији слева мора бити цифра 9, а за наредне три позиције имамо 3 могућности (у зависности од тога на којој од њих је преостала цифра 9). Дакле, постоје укупно 3 таква броја: 9900, 9090 и 9009.

2. Пошто решења треба да буду реална и различита, дискриминанта мора бити позитивна, тј. $0 < (3m)^2-16(m+1)m = -7m^2-16m = -m(7m+16)$, одакле добијамо $m \in (-\frac{16}{7}, 0)$. Нека су x_1 и x_2 решења посматране једначине. Из Вијетових формула имамо $x_1+x_2 = \frac{3m}{m+1}$ и $x_1x_2 = \frac{4m}{m+1}$. Како оба решења треба да буду већа од -1, бројеви x_1+1 и x_2+1 морају бити позитивни, што значи $(x_1+1)+(x_2+1) > 0$ и $(x_1+1)(x_2+1) > 0$. Одатле имамо $0 < x_1+x_2+2 = \frac{3m}{m+1}+2 = \frac{5m+2}{m+1}$ и $0 < x_1x_2+x_1+x_2+1 = \frac{4m}{m+1}+\frac{3m}{m+1}+1 = \frac{8m+1}{m+1}$. Прва неједнакост се своди на $m \in (-\infty, -1)\cup(-\frac{2}{5}, \infty)$, а друга на $m \in (-\infty, -1)\cup(-\frac{1}{8}, \infty)$. Дакле, узимајући пресек сва три добијена скупа за m, добијамо да је коначно решење задатка: $m \in (-\frac{16}{7}, -1)\cup(-\frac{1}{8}, 0)$.

3. У сваком тангентном четвороуглу важи $AB+CD = AD+BC$, па сабирањем ове једнакости с оном датом у поставци добијамо $2AB = 2BC$, тј. $AB = BC$. Аналогно, $AD = DC$. Сада из става ССС добијамо $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, одакле закључухујемо $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$. Но, како је четвороугао $ABCD$ такође тетиван а $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle DCB$ су два његова наспрамна угла, њихов збир износи 180°, па следи да су $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle DCB$ прави углови. Дакле, тачке A и C леже на кружници над пречником BD, што је и требало доказати.

4. Нека су x_1, x_2 и x_3 решења постављене једначине, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$. Из Вијетових формула имамо $x_1+x_2+x_3 = 3a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 2a^2+5$ и $x_1x_2x_3 = 2a^2-3$. Како решења треба да чине аритметичку прогресију, можемо записати $x_1 = x_2-d$ и $x_3 = x_2+d$ за неки реалан број d, $d > 0$. Тада се претходне три формуле своде на

$$3x_2 = 3a, \quad 3x_2^2-d^2 = 2a^2+5 \quad \text{и} \quad x_2^3-x_2d^2 = 2a^2-3.$$

Из прве од њих одмах добијамо $x_2 = a$. Друге две се тада своде на

$$d^2 = 3x_2^2-2a^2-5 = 3a^2-2a^2-5 = a^2-5 \quad \text{и} \quad d^2 = \frac{x_2^3-2a^2+3}{x_2} = \frac{a^3-2a^2+3}{a}.$$

Даље, уврштавањем $x_2 = a$ у једначину из поставке задатка добијамо

$$0 = a^3-3a^3+(2a^2+5)a-2a^2+3 = 5a-2a^2+3,$$

одакле следи $a = \frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{-4} = \frac{-5\pm7}{-4}$, тј. $a = -\frac{1}{2}$ или $a = 3$. У случају $a = -\frac{1}{2}$ следило би $d^2 = (-\frac{1}{2})^2-5 = -\frac{19}{4} < 0$, па постављена једначина не би имала сва реална решења. У случају $a = 3$ имамо $d^2 = 3^2-5 = 4$ (и $d^2 = \frac{3^3-2\cdot3^2+3}{3} = 4$, што је исто), тј. $d = 2$; постављена једначина тада гласи $x^3-9x^2+23x-15 = 0$, и њена решења су $x_1 = x_2-d = 3-2 = 1$, $x_2 = 3$ и $x_3 = x_2+d = 3+2 = 5$.

Дакле, једина таква вредност параметра a јесте $a = 3$.

5. Бројеви који у декадном запису имају тачно k цифара су управо сви природни бројеви од $1\underbrace{0\ldots0}_{k-1\text{ пута}}$ до $\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ пута}}$, тј. од 10^{k-1} до 10^k-1, и њих има $(10^k-1)-10^{k-1}+1=10^k-10^{k-1}$. Према томе, групишући једнаке сабирке добијамо:

$$\begin{aligned}\operatorname{brc}(1)+\operatorname{brc}(2)+\cdots+\operatorname{brc}(\underbrace{99\ldots99}_{2019\text{ пута}}) &= \sum_{k=1}^{2019}k(10^k-10^{k-1})=\sum_{k=1}^{2019}k10^k-\sum_{k=1}^{2019}k10^{k-1}=\sum_{k=0}^{2019}k10^k-\sum_{k=0}^{2018}(k+1)10^k\\ &=2019\cdot10^{2019}+\sum_{k=0}^{2018}(k-(k+1))10^k=2019\cdot10^{2019}-\sum_{k=0}^{2018}10^k\\ &=2019\cdot(10^{2019}-1)+2019-\frac{10^{2019}-1}{9}=2019\cdot\underbrace{99\ldots99}_{2019\text{ пута}}+2019-\underbrace{11\ldots11}_{2019\text{ пута}},\end{aligned}$$

што је и требало показати.