60. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Бат, Уједињено Краљевство – уторак, 16. јул 2019.

1. Нека је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да за све целе бројеве a и b важи

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

(Јужна Африка)

2. Тачка A_1 је изабрана на страници BC, а тачка B_1 на страници AC троугла ABC. Тачке P и Q изабране су на дужима AA_1 и BB_1, редом, тако да је права PQ паралелна правој AB. Нека је P_1 тачка на правој PB_1 таква да је B_1 између тачака P и P_1 и да важи $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Слично, нека је Q_1 тачка на правој QA_1 таква да је A_1 између тачака Q и Q_1 и да важи $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$.

Доказати да су тачке P, Q, P_1 и Q_1 концикличне. *(Украјина)*

3. Једна друштвена мрежа има 2019 корисника од којих су неки парови пријатељи. При томе, ако је A пријатељ корисника B, тада је и B пријатељ корисника A. Једна по једна, промене следећег типа се могу догодити:

> Три корисника A, B и C, таква да је A пријатељ и са B и са C, али B и C нису пријатељи, мењају статусе својих пријатељстава тако да су B и C сада пријатељи, али A више није пријатељ ни са B ни са C; статуси свих осталих пријатељстава се не мењају.

На почетку 1010 корисника има по 1009 пријатеља, а 1009 корисника по 1010 пријатеља. Доказати да постоји низ описаних промена након којег сваки корисник има највише једног пријатеља међу осталима. *(Хрватска)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

60. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Бат, Уједињено Краљевство – среда, 17. јул 2019.

4. Наћи све парове (k,n) природних бројева таквих да важи

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

(Салвадор)

5. Банка града Бата издаје новчиће који са једне стране имају ознаку H, а са друге ознаку T. Хари је поређао n оваквих новчића у низ слева надесно. Са овим новчићима он понавља следећу операцију: ако је у низу тачно $k > 0$ новчића који показују H, тада окреће k-ти новчић слева; у супротном сви новчићи показују T и процес се завршава. На пример, ако је $n = 3$ и почетни распоред је THT, Хари врши низ операција $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ и процес се завршава након ове три операције.

(а) Доказати да за сваки почетни распоред новчића Хари завршава описани процес након коначно много операција.

(б) За почетни распоред C, нека је са $L(C)$ означен број операција које Хари изврши пре него што се процес заврши. На пример, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Одредити аритметичку средину бројева $L(C)$ по свих 2^n могућих почетних распореда C.

(С.А.Д.)

6. Нека је I центар уписане кружнице ω оштроуглог троугла ABC у коме је $AB \neq AC$. Кружница ω додирује странице BC, CA и AB у тачкама D, E и F, редом. Права која садржи D и нормална је на EF поново сече кружницу ω у тачки R. Права AR поново сече кружницу ω у тачки P. Кружнице описане око троуглова PCE и PBF поново се секу у тачки Q.

Доказати да се праве DI и PQ секу на правој која садржи тачку A и нормална је на AI.

(Индија)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. Заменом $(a,b)=(0,x)$ добијамо $f(f(x))=2f(x)+f(0)$. Одавде из полазне једначине за $a=1$ добијамо $f(2)+2f(b)=f(f(b+1))=2f(b+1)+f(0)$, тј.

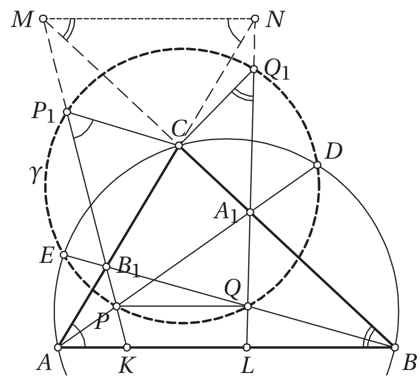
$$f(b+1)-f(b)=\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$$

је константно. Према томе, функција f је линеарна, тј. $f(x)=kx+n$ за неке константе k и n. Убацивањем у полазну једначину добијамо $2k(a+b)+3n=k^2(a+b)+(k+1)n$ за све a и b, што је задовољено само за $k=2$ или $(k,n)=(0,0)$.

Дакле, једина решења су функције $f(x)=0$ и $f(x)=2x+n$ за произвољно $n\in\mathbb{Z}$.

2. Нека праве AA_1 и BB_1 редом поново секу описани круг троугла ABC у тачкама D и E. Како је $\sphericalangle EDP=\sphericalangle EDA=\sphericalangle EBA=\sphericalangle EQP$, тачке D, E, P и Q леже на истом кругу γ.

Означимо са K пресечну тачку правих PB_1 и AB. Пошто је $\sphericalangle CP_1K=\sphericalangle CAK$, четвороугао AP_1CK је тетиван, па из потенције тачке B_1 добијамо $B_1K\cdot B_1P_1=B_1A\cdot B_1C=B_1B\cdot B_1E$. Како је по Талесовој теореми $B_1P:B_1K=B_1Q:B_1B$, одавде следи $B_1P\cdot B_1P_1=B_1Q\cdot B_1E$, што значи да тачка P_1 лежи на кругу γ.



Аналогно је и тачка Q_1 на кругу γ, што завршава доказ.

<u>*Друго решење.*</u> Нека права PB_1 сече праве AB и BC редом у тачкама K и M, а права QA_1 сече праве AB и AC редом у тачкама L и N. На основу Папосове теореме за тачке A_1,P,A и B_1,B,Q, тачке M и N (које су обе коначне или обе бесконачне) и бесконачна тачка $AB\cap PQ$ су колинеарне, тј. $MN\parallel AB\parallel PQ$.

Ако су M и N коначне тачке, из $\sphericalangle KP_1C=\sphericalangle KAC=180^\circ-\sphericalangle MNC$ следи да тачка P_1 лежи на описаном кругу $\triangle MNC$; аналогно, и тачка Q_1 лежи на том кругу. Сада је $\sphericalangle PP_1Q_1=\sphericalangle MNQ_1=180^\circ-\sphericalangle Q_1QP$, па је четвороугао PQQ_1P_1 тетиван.

Ако су M и N бесконачне тачке, тј $PB_1\parallel BC$ и $QA_1\parallel AC$, тачке P_1, C и Q_1 су колинеарне ($\sphericalangle P_1CA=\sphericalangle P_1KA=\sphericalangle CBA$ и $\sphericalangle BCQ_1=\sphericalangle BAC$, па је $\sphericalangle P_1CQ_1=180^\circ$), те је $\sphericalangle PP_1Q_1=\sphericalangle PP_1C=\sphericalangle BAC=180^\circ-\sphericalangle Q_1QP$, и опет је PQQ_1P_1 тетиван.

3. Друштвена мрежа представља граф G у коме су темена корисници, а гране пријатељства. Описане измене зваћемо *обртима.*

Граф G је повезан - у супротном би темена у мањој компоненти повезаности имала степене мање од 1009. Примењиваћемо обрте тако да он остане повезан све док је то могуће. Пошто се број грана смањује, овај процес се мора завршити. Тако нам остаје граф H који је повезан, али би га сваки обрт развезао.

Граф H очито није потпун. Такође, пошто обрти не мењају парност степена темена графа, а полазни граф G нема све степене парне, граф H има и темена непарног степена, те није ни цикличан.

(1°) Ако у графу H постоје троуглови, посматрајмо максималан потпун подграф $\mathscr{K}$ и одаберимо грану AB са $A \in \mathscr{K}$ и $B \notin \mathscr{K}$. Постоји теме $C \in \mathscr{K}$ које није спојено граном са B. Тада обрт на тројци ABC не би развезао граф.

(2°) Ако нема троуглова, али има циклуса, посматрајмо најмањи циклус $\mathscr{O}$ и грану AB са $A \in \mathscr{O}$ и $B \notin \mathscr{O}$. Нека је $C \in \mathscr{O}$ теме суседно темену A. Како ABC није троугао, BC није грана. И у овом случају обрт на тројци ABC не би развезао граф.

Према томе, у графу H не постоје циклуси, тј. H је дрво. Пошто обрти не могу створити циклусе, надаље је довољно извршавати обрте све док постоје темена степена бар 2. Граф који остане на крају имаће све темена степена 1 или 0.

4. Највећи цео број r такав да $2^r \mid k!$ једнак је $\left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{4}\right] + \left[\frac{k}{8}\right] + \cdots < k$. Пошто је број $f(n) = \prod_{i=0}^{n-1}(2^n - 2^i)$ дељив са $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, следи да је $k > \frac{n(n-1)}{2}$. Према томе,

$$2^{n^2} > f(n) = k! > \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!.$$

Међутим, за $n \geqslant 6$ ова неједнакост не важи. Заиста, за $n = 6$ имамо $15! > 2^{36}$, док је за $n > 6$

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! > 15! \cdot 16^{\frac{n(n-1)}{2} - 15} > 2^{36} \cdot 2^{2n(n-1)-60} = 2^{2n^2-2n-24} > 2^{n^2},$$

јер је $n^2 - 2n - 24 > 0$.

Најзад, пошто је $f(3) = 168$, $f(4) = \frac{1}{2} \cdot 8!$ и $31 | f(5) < 31!$, ни у тим случајевима нема решења, па су једина решења $(k,n) = (1,1)$ и $(k,n) = (3,2)$.

5. Нека је $\ell(n)$ просечна вредност $L(C)$ по свим распоредима n новчића. Имамо $\ell(0) = 0$ и $\ell(1) = \frac{1}{2}$. Део (а) ће следити из доказа да је $\ell(n)$ коначно.

Са $f(c)$ означавамо распоред који се добија из распореда $c = a_1 a_2 \ldots a_n$ након једне операције. Такође, уводимо ознаку $\widehat{c} = \bar{a}_n \ldots \bar{a}_2 \bar{a}_1$, где је $\bar{H} = T$ и $\bar{T} = H$.

(1°) За произвољан распоред n новчића c важи $f(cT) = f(c)T$.

Према томе, просечна вредност $L(cT)$ једнака је $\ell(n)$.

(2°) С друге стране, $f(\widehat{c}H) = \widehat{f(c)}H$. Заиста, ако тачно k новчића у распореду c показује H, онда се $f(c)$ разликује од c само на $(n-1-k)$-тој позицији, па се $\widehat{f(c)}H$ разликује од $\widehat{c}H$ само на $(k+1)$-вој, тј. поклапа се са $f(\widehat{c}H)$.

Из распореда $\widehat{c}H$ се након $L(c)$ операција добија распоред $HH\ldots HH$, из кога се потом у $n+1$ операција добија распоред $TT\ldots TT$. Према томе, просечна вредност $L(cH)$ је $\ell(n) + n + 1$.

Дакле, $\ell(n+1)=\ell(n)+\frac{n+1}{2}$, одакле је индукцијом $\ell(n)=\frac{n(n+1)}{4}$.

Друго решење. За распоред n новчића $C=a_1a_2\dots a_n$ означимо са $\tau(C)$ број новчића који показују H, а са $\sigma(C)$ збир позиција i на којима је $a_i=H$. На пример, $\tau(HHTTH)=3$ и $\sigma(HHTTH)=1+2+5=8$.

Нека се операцијом из распореда C добија распоред C'. Имамо $\tau(C')=\tau(C)\pm 1$ и $\sigma(C')=\sigma(C)\pm\tau(C)$, зависно од тога да ли је на $\tau(C)$-тој позицији T или H. У оба случаја је

$$\lambda(C')=\lambda(C)-1, \quad \text{где је} \quad \lambda(C)=2\sigma(C)-\tau(C)^2.$$

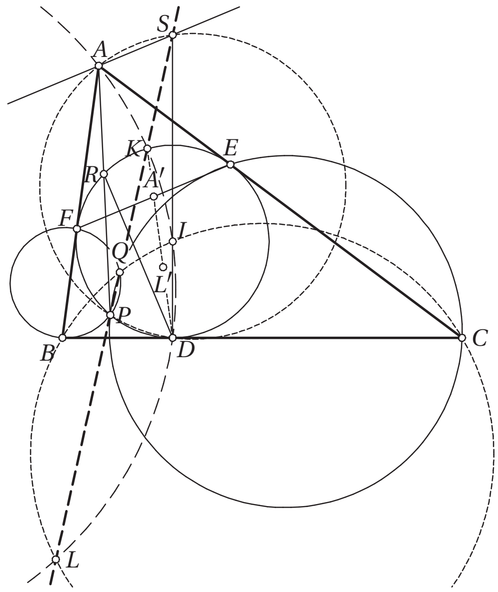
Како је $\lambda(C)\geqslant 2(1+2+\dots+\tau(C))-\tau(C)^2\geqslant 0$ за сваки распоред C, следи да је $L(C)=\lambda(C)$ увек коначно.

Просечна вредност $\sigma(C)$ је једнака $\frac{1}{2}(1+2+\dots+n)=\frac{n(n+1)}{4}$, јер за свако i новчић на i-том месту показује H тачно у половини случајева. Просечна вредност $\tau(C)^2$ је

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2 n!}{i!(n-i)!}=\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n-1}{i-1}=\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\binom{n-1}{i-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(n+1)\binom{n-1}{i-1}=\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}\cdot 2^{n-1}=\frac{n(n+1)}{4}.$$

Према томе, просечна вредност $L(C)$ је једнака $2\cdot\frac{n(n+1)}{4}-\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)}{4}$.

6. Нека нормала у A на AI сече праву DI у тачки S. Како је $AI\parallel RD\perp EF$, имамо $\sphericalangle PDS=90^\circ-\sphericalangle BDP=90^\circ-\sphericalangle DRP=90^\circ-\sphericalangle IAP=180^\circ-\sphericalangle SAP$, па је четвороугао $APDS$ тетиван.



Даље, $\sphericalangle BQC=\sphericalangle BQP+\sphericalangle PQC=\sphericalangle BFP+\sphericalangle PEC=\sphericalangle FEP+\sphericalangle PEC=\sphericalangle FEC=90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle A=\sphericalangle BIC$, па је и четвороугао $BQIC$ тетиван.

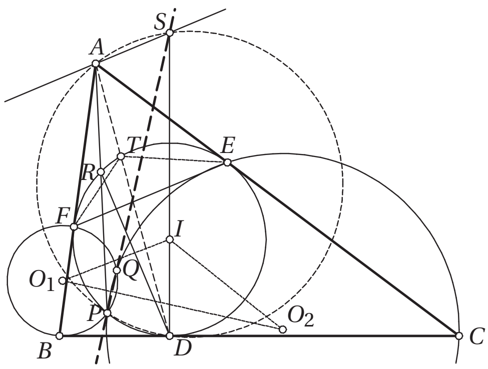
Нека права PS поново сече уписани круг у тачки K. Тада важи $\sphericalangle EDS=\sphericalangle RDF$ и $\sphericalangle SDA=\sphericalangle SPA=\sphericalangle KPR=\sphericalangle KDR$, тј. DA и DK су симетричне у односу на симетралу угла EDF, па како је DA симедијана у $\triangle DEF$, права DK садржи средиште A' дужи EF.

Из $\triangle APE\sim\triangle AER$ и $\triangle APF\sim\triangle AFR$ следи $\frac{RF}{FP}=\frac{AF}{AP}=\frac{AE}{AP}=\frac{RE}{EP}$, тј. четвороугао $FREP$ је хармонијски. У сличности $\triangle FRE\sim\triangle BIC$ тачки P одговара тачка L таква да је $FREP\sim BICL$. Тада је $\frac{IB}{BL}=\frac{IC}{CL}$. Пошто је $\sphericalangle PQB=\sphericalangle PFB=\sphericalangle PEF=\sphericalangle LCB=\sphericalangle LQB$, тачка Q лежи на правој PL. Остаје да покажемо да су тачке L, P и K колинеарне.

При инверзији у односу на уписани круг тачке D, E, F, K су фиксне, тачке A, B и C се сликају редом у средишта A', B' и C' дужи EF, DF и DE, а L се слика у тачку L' такву да је $\frac{IL'}{L'B'} = \frac{IB}{BL} = \frac{IC}{CL} = \frac{IL'}{L'C'}$, па је $L'B' = L'C'$, тј. L' је средиште дужи $B'C'$. Према томе, четири тачке D, L', A' и K леже на истој правој, што значи да D, L, A и K леже на кругу кроз I, тј. $AKIDL$ је тетиван петоугао. Сада из сличности $FREP \sim BICL$ следи $\sphericalangle LKD = \sphericalangle LID = \sphericalangle PRD = \sphericalangle PKD$, тј. L лежи на правој PK, чиме је доказ завршен.

Друго решење. Тачка S пресека праве DI и нормале на AI у A лежи на кругу APD јер је $\sphericalangle PDS = 90^\circ - \sphericalangle BDP = 90^\circ - \sphericalangle DRP = 90^\circ - \sphericalangle IAP = 180^\circ - \sphericalangle SAP$.

Нека права AD сече уписани круг у тачки $T \neq D$. Из $\triangle ATE \sim \triangle AED$ и $\triangle ATF \sim \triangle AFD$ следи $\frac{ET}{ED} = \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{FD} = \frac{FT}{FD}$, тј. $\frac{ET}{FT} = \frac{ED}{FD}$. На сличан начин добија се $\frac{EP}{FP} = \frac{ER}{FR}$. Означимо са O_1 и O_2 редом центре описаних кругова троуглова BPF и CPE. Тада важи $O_1I \perp FP$, $O_2I \perp EP$ и $O_1O_2 \perp PQ$. Пошто је $\sphericalangle PO_1B = 2\sphericalangle PFB = 2\sphericalangle PEF = \sphericalangle PIF$, троуглови PO_1B и PIF су обртно хомотетични, одакле следи $\triangle PO_1I \sim \triangle PBF$. Слично важи $\triangle PO_2I \sim \triangle PCE$. Из ове две сличности имамо $O_1I = BF \cdot \frac{IP}{FP}$ и $O_2I = CE \cdot \frac{IP}{EP}$, па је $\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{EP}{FP}$. Сада из $\frac{EP}{FP} = \frac{ER}{FR} = \frac{\sin\sphericalangle EFR}{\sin\sphericalangle FER} = \frac{\cos\sphericalangle DEF}{\cos\sphericalangle DFE} = \frac{\cos\sphericalangle DFB}{\cos\sphericalangle DEC}$ следи да је $\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{BF\cos\sphericalangle DFB}{CE\cos\sphericalangle DEC} = \frac{FD}{ED} = \frac{FT}{ET}$. Притом је $\sphericalangle O_1IO_2 = 180^\circ - \sphericalangle EPF = \sphericalangle FTE$, па закључујемо да је $\triangle O_1IO_2 \sim \triangle FTE$.



Сада имамо $\sphericalangle EPQ = \sphericalangle IO_2O_1 = \sphericalangle TEF = \sphericalangle ADF = \sphericalangle SDF - \sphericalangle SDA = \sphericalangle EPR - \sphericalangle SPA = \sphericalangle EPS$, па су тачке P, Q и S колинеарне.