Уторак, 16. јул 2019.

1. задатак. Нека је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева. Одредити све функције $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да за све целе бројеве a и b важи

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

2. задатак. Тачка A_1 изабрана је на страници BC, а тачка B_1 на страници AC троугла ABC. Тачке P и Q изабране су на дужима AA_1 и BB_1, редом, тако да је права PQ паралелна са правом AB. Нека је P_1 тачка на правој PB_1 таква да је B_1 између тачака P и P_1 и да важи $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Слично, нека је Q_1 тачка на правој QA_1 таква да је A_1 између тачака Q и Q_1 и да важи $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$.

Доказати да су тачке P, Q, P_1 и Q_1 концикличне.

3. задатак. Једна друштвена мрежа има 2019 корисника од којих су неки парови пријатељи. При томе, ако је A пријатељ корисника B, тада је и B пријатељ корисника A. Једна по једна, промене следећег типа се могу догодити:

> три корисника A, B и C, таква да је A пријатељ и са B и са C, али B и C нису пријатељи, мењају статусе њихових пријатељстава тако да су B и C сада пријатељи, али A више није пријатељ ни са B ни са C; статуси свих осталих пријатељстава се не мењају.

На почетку 1010 корисника има по 1009 пријатеља, а 1009 корисника по 1010 пријатеља. Доказати да постоји низ описаних промена након којих сваки корисник има највише једног пријатеља међу преосталима.

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Среда, 17. јул 2019.

4. задатак. Наћи све парове (k, n) природних бројева такве да важи

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

5. задатак. Банка града Бата издаје новчиће који са једне стране имају ознаку H, а са друге ознаку T. Хари је поређао n оваквих новчића у низ слева на десно. Са овим новчићима он понавља следећу операцију: ако је у низу тачно $k > 0$ новчића који показују H, тада окреће k-ти новчић слева; иначе, сви новчићи показују T и процес се завршава. На пример, ако је $n = 3$ и почетни распоред је THT, Хари врши следећи низ операција $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, и процес се завршава након ове три операције.

(а) Доказати да за сваки почетни распоред новчића Хари завршава описани процес након коначно много операција.

(б) За почетни распоред C нека је са $L(C)$ означен број операција које Хари изврши пре него што се процес заврши. На пример, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Одредити аритметичку средину бројева $L(C)$ по свих 2^n могућих почетних распореда C.

6. задатак. Нека је I центар уписане кружнице оштроуглог $\triangle ABC$, где је $AB \neq AC$. Уписана кружница ω троугла ABC додирује странице BC, CA и AB у тачкама D, E и F, редом. Права која садржи D и нормална је на EF сече кружницу ω поново у тачки R. Права AR сече кружницу ω поново у тачки P. Кружнице описане око троуглова PCE и PBF секу се поново у тачки Q.

Доказати да се праве DI и PQ секу на правој која садржи A и нормална је на AI.

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.