4th Olympiad of Metropolises
Mathematics

Contents

English

Day 1

Problem 1. Three prime numbers p, q, r and a positive integer n are given such that the numbers ru

$$\frac{p+n}{qr}, \frac{q+n}{rp}, \frac{r+n}{pq}$$

are integers. Prove that $p = q = r$. *(Nazar Agakhanov)*

Solution. We can assume without loss of generality that $p \geq q \geq r$.

Since $p \mid q+n$ and $p \mid r+n$, we have $p \mid q-r$, but $0 \leq q-r < q \leq p$, so we must have $q = r$. Furthermore, $q \mid p+n$ and $q \mid r+n$ imply $q \mid p-r = p-q$, so $q \mid p$, which is only possible if $p = q = r$. $\square$

Marking scheme

Maximum of the following points is taken:

7 p. for a complete solution;

1 p. for proving $p \mid q-r$ and/or similar;

2 p. for proving $p \mid q - r$, where p *explicitly* denotes the maximum of p, q, r;

4 p. for proving that two of the numbers are equal;

3 p. for proving of $p = q = r$ under assumption that two of the numbers are already equal.

Problem 2. In a social network with a fixed finite set of users, each user has a fixed set of *followers* among the other users. Each user has an initial positive integer rating (not necessarily the same for all users). Every midnight the rating of every user increases by the sum of the ratings that his followers had just before the midnight. ru

Let m be a positive integer. A hacker, who is not a user of the network, wants all the users to have ratings divisible by m. Every day, he can either choose a user and increase his rating by 1, or do nothing. Prove that the hacker can achieve his goal after some number of days. *(Vladislav Novikov)*

Solution. Let n be the number of users in the network. We will consider the remainders of ratings modulo m. The hacker wants to change all n remainders to zero.

If the hacker was allowed to increase ratings more than once on the same day then he could achieve his goal on the first day. Indeed, he could first increase the rating of the first user several times until it becomes 0 modulo m and then similarly for the second user, and so on. After that the hacker does not need any further action, the ratings of all users will be zeroes from the second day. We will call this *initial strategy.*

We will prove that the hacker can do the same operations but on different days, so that after some days the ratings of all users will be 0.

We represent the states of the network by vectors containing the modulo m remainders of the n users' ratings. Such vectors can be *added* modulo m. E.g., if $m = 4$ and $n = 6$, then

$$(1, 2, 3, 0, 2, 1) + (2, 3, 3, 0, 2, 3) = (3, 1, 2, 0, 0, 0)\,.$$

For a vector X of ratings before midnight we denote by $f(X)$ the new state after midnight.

Lemma.

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y)\,.$$

Proof of the lemma. We need to show that vectors $f(X+Y)$ and $f(X)+f(Y)$ match at all the positions, i.e., for every person. Consider such a person and let his name be Bob. Let b_x be Bob's remainder in X, and let s_x be the sum of ratings of his followers modulo m in X. Let b_y and s_y be correspondingly Bob's remainder and the sum of remainders of his followers in Y.

Then in $f(X)$ Bob has $b_x + s_x$, in $f(Y)$ Bob has $b_y + s_y$, and in $f(X+Y)$ Bob has $b_x + b_y + s_x + s_y$. *Lemma is proven.*

Let us calculate the future effect of a hacker's action. If X is the initial vector and the hacker does not do anything, we obtain the sequence of vectors

$$X,\ f(X),\ f(f(X)),\ \ldots,\ f^k(X),\ \ldots$$

where f^k denotes the kth iteration of f.

If the hacker changes X by adding 1 to Bob's rating (and does nothing after that), we'll have

$$X + e_b,\ f(X + e_b) = f(X) + f(e_b),\ \ldots,\ f^k(X) + f^k(e_b),\ \ldots,$$

where 1 in the vector $e_b = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ corresponds to Bob.

So, the future effect after k days is $f^k(e_b)$. Similarly we show the following: let X be a vector, and suppose there are two strategies of the hacker that differ by addition of e_b on one of the days; then k days later the results of these strategies will differ by $f^k(e_b)$.

Each vector in the sequence $(f^k(e_b))$ is determined by the previous one and there is a finite number (namely m^n) of different vectors. Hence the sequence $(f^k(e_b))$ is eventually periodic. Let T_b be the length of its period. If we change the hacker's strategy by deferring the addition of e_b by T_b days to the future, then the result of the strategy will be the same after several days (no more than m^n days).

Now we will sequentially defer all actions from the first day to other days so that the hacker's actions are performed in distinct days. We can defer an event by the corresponding period as many times as we want, so it is possible.

Thus, we get a strategy for the hacker, the result of which after some time (no more than m^n days after the last change) does not differ from the initial strategy with all actions on the first day. The result of the initial strategy by this moment is the zero vector. So, it will be equal to zero in our new strategy with no more than one action per day. □

Marking scheme

Maximum of the following points is taken:

- 7 p. for a complete solution;
- 2 p. for a correct solution under the assumption that f is a bijection (equivalently, $(f^k(X)$ does not have a preperiod for any X);
- 2 p. *the sum of the following two points:*
  - 1 p. for proving the lemma;

1 p. for proving that the sequence of ratings is eventually periodic modulo m;

0 p. for considering particular cases of n (a limited set);

0 p. for considering particular cases of m (e.g. m is a power of 2), or for reducing general case of m to some special values of m (e.g. prime m);

0 p. for considering particular cases of the oriented graph of followers;

0 p. for working modulo m, or reformulating the problem in terms of finite number of states (or vectors over $\mathbb{Z}_m$).

Problem 3. In a non-equilateral triangle ABC point I is the incenter and point O is the circumcenter. A line s through I is perpendicular to IO. Line ℓ symmetric to the line BC with respect to s meets the segments AB and AC at points K and L, respectively (K and L are different from A). Prove that the circumcenter of triangle AKL lies on the line IO. *(Dušan Djukić)* ru

Marking scheme

7 p. for a complete solution.

In the absence of a complete solution, partial points are awarded for certain advancements in one *of the solutions (i.e. maximum is taken). See below.*

Certain other advancements are not awarded points, however:

0 p. for restating the problem by performing a geometric transformation or using analytical methods;

0 p. for incomplete analytic approaches, unless geometric interpretations of intermediate results according to the marking scheme below are clearly stated and correctly proved;

0 p. for doing simple starting observations such as:

- stating $BCLK$ is tangential (or equivalent);
- using Miquel point of lines AB, BC, CA, KL with noticing some similar triangles and possibly reformulating in terms of Miquel point.

Solution 1. Let the incircle ω touch the lines BC, AC, AB and KL at points D, E, F and G, respectively. Denote the circumcenter of triangle AKL by U.

Since $DG \parallel IO$, we have $\angle KIG = \angle KFG = \angle FDG = \angle FDI + \angle IDG = \angle KBI + \angle OIG$ (in oriented angles) and hence $\angle KIO = \angle KBI$. It follows that the circle BIK is tangent to the line IO. Similarly, the circle CIL is tangent to the line IO.

Invert the diagram through ω (fig. 1). The points A, B, C, K and L map to the midpoints A', B', C', K' and L' of EF, FD, DE, FG and EG, respectively. The images of the circles BIK and CIL are the lines $B'K'$ and $C'L'$, so these two lines are parallel to IO. The circles ABC and AKL map to circles $A'B'C'$ and $A'K'L'$ whose centers are O_1 and U_1, respectively. Thus $O_1 \in IO$ and $U_1 \in IU$. Since $B'C'L'K'$

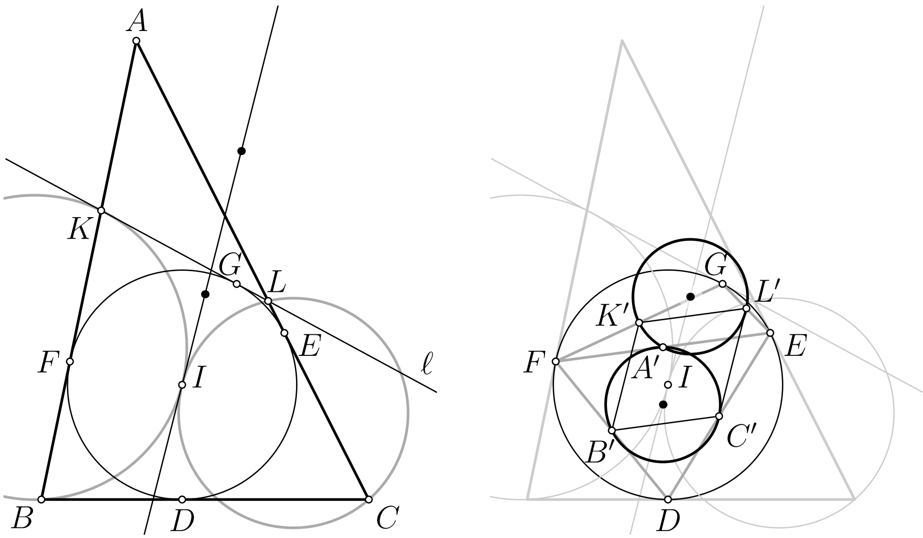


Figure 1: for the solution of the problem 3

is a parallelogram and $\angle L'A'K' = \angle FGE = 180^\circ - \angle EDF = 180^\circ - \angle B'A'C'$, the translation by vector $\overrightarrow{B'K'} = \overrightarrow{C'L'}$ takes the circle $A'B'C'$ to the circle $A'K'L'$, so the line O_1U_1 is parallel to IO. It follows that U_1 lies on IO, and so does U. $\square$

Marking scheme for Solution 1

The sum of the following points is taken:

1 p. for proving that the circles BIK and CIL touch IO;

1 p. for deducing that $B'C'L'K'$ is a parallelogram;

2 p. for proving that the circumcenters of $\triangle A'B'C'$ and $\triangle A'K'L'$ lie on IO and IU;

Solution 2. Let the incircle ω touch the lines BC, AC, AB and KL at points D, E, F and G, respectively. Note that $GD \perp s$, so $GD \parallel IO$. Denote the circumcenter of $\triangle AKL$ by U. We use the following known fact:

Lemma. The line IO is the Euler line of triangle DEF.

Proof of the lemma. Let us apply the inversion with respect to the incircle ω. Points A, B and C map to the midpoints of EF, FD and DE, so the circumcircle of $\triangle ABC$ maps to the nine-point circle of $\triangle DEF$. Therefore the nine-point center of $\triangle DEF$ lies on IO, i.e. O lies on the Euler line of $\triangle DEF$. *Lemma is proven.*

By the Lemma, the centroid M of $\triangle DEF$ lies on IO. Similarly, we can show that the centroid N of $\triangle GEF$ lies on IU. However, $MN \parallel DG \parallel IO$, which implies that U lies on IO. $\square$

Marking scheme for Solution 2

The sum of the following points is taken:

- 2 p. for proving that IO is the Euler line of $\triangle DEF$; or
  - 1 p. for just stating the above statement;
- 1 p. for extending the above statement to $\triangle GEF$;
- 1 p. for considering the centroids of $\triangle DEF$ and $\triangle GEF$;
- 1 p. for proving that Euler line of $\triangle GEF$ is parallel to IO;

Solution 3. We denote by $\delta(X, \overrightarrow{a})$ the oriented distance from point X to line $\overrightarrow{a}$.

Lemma. A point X in the plane lies on the line s if and only if

$$f(X) = \delta(X, \overrightarrow{BC}) + \delta(X, \overrightarrow{CA}) + \delta(X, \overrightarrow{AB}) = 3r\,,$$

where r is the inradius of $\triangle ABC$.

Proof of the lemma. The oriented distance to a fixed line is a linear function. Therefore $f(X)$ is a linear function as well (non-constant, since triangle ABC is not equilateral), so the locus of points X in the plane satisfying $f(X) = 3r$ is some line s'. Since $f(I) = 3r$, we have $I \in s'$.

Observe that, if ℓ_a, ℓ_b and ℓ_c are the perpendicular bisectors of BC, CA and AB directed towards the triangle, then $\delta(I, \ell_a) + \delta(I, \ell_b) + \delta(I, \ell_c) = \sum_{cyc}(p - c - \frac{a}{2}) = 0$. It follows by rotation by 90° that $f(X)$ remains constant as X traces any line perpendicular to IO (e.g. line s). *Lemma is proven.*

Denote the circumcenter of $\triangle AKL$ by U. Switching to $\triangle AKL$ with ω as the excircle opposite to A, we similarly deduce that:

Corollary. A point X in the plane lies on the line s_1 passing through I and orthogonal to IU if and only if

$$f_1(X) = -\delta(X, \overrightarrow{KL}) + \delta(X, \overrightarrow{LA}) + \delta(X, \overrightarrow{AK}) = 3r\,.$$

(This function is non-constant, since e.g. $f_1(A)$ is negative.)

If $X \in s$, then $\delta(X, \overrightarrow{BC}) = -\delta(X, \overrightarrow{KL})$, which means $f_1(X) = f(X) = 3r$. Therefore the lines s and s_1 coincide, i.e. U is on IO. $\square$

Marking scheme for Solution 3

The sum of the following points is taken:

- 2 p. for proving the Lemma; or

1 p. for just stating the Lemma;

2 p. for extending the Lemma to $\triangle AKL$;

No points are deducted for forgetting the case $s \parallel BC$

Day 2

Problem 4. There are 100 students taking an exam. The professor calls them one by one and asks each student a single question: "How many of 100 students will have a 'passed' mark by the end of this exam?" The student's answer must be an integer. Upon receiving the answer, the professor immediately publicly announces the student's mark, which is either "passed" or "failed". ru

After all the students have got their marks, an inspector comes and checks if there is any student who gave the correct answer but got a "failed" mark. If at least one such student exists, then the professor is suspended and all the marks are replaced with "passed". Otherwise no changes are made.

Can the students come up with a strategy that guarantees a "passed" mark to each of them? *(Denis Afrizonov)*

Solution. The students can come up with the following strategy. Every student tells the number of students who already have the "passed" mark plus the number of students whose turn to answer has not come yet. In other words, if k students have already received a "failed" mark, the answer should be $99 - k$.

Let us prove that this strategy works. If all the students receive a "passed" mark, we are done. Otherwise consider the last (in order) student who has received a "failed" mark; denote him by Peter. Since all the students after him (if there are any) received a "passed" mark, then Peter's answer is correct. Thus the professor will get suspended and the students win.

Note. The students' winning strategy is unique.

To show this, consider the first student who deviated from our strategy; denote him by Basil. The professor can mark him "failed" and mark everyone after him "passed". All answers of the students before him will be rendered incorrect (according to the strategy, they will all give a larger answer), and his answer will be wrong, too (because the right answer would be given by the strategy). This means that Basil will remain "failed". □

Marking scheme

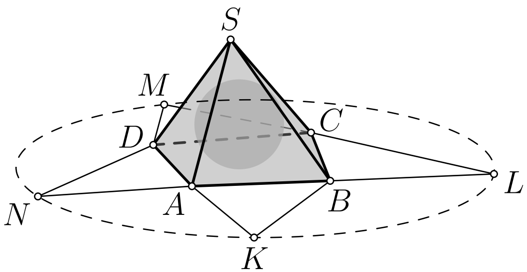
Maximum of the following points is taken:

7 p. for a complete solution;

4 p. for providing the winning strategy without proof;

1 p. for solving the problem for some number of students other than 100 and greater than 2.

Problem 5. We are given a convex four-sided pyramid with apex S and base face $ABCD$ such that the pyramid has an inscribed sphere (i.e., it contains a sphere which is tangent to each face). By making cuts along the edges SA, SB, SC, SD and rotating the faces SAB, SBC, SCD and SDA outwards into the plane $ABCD$, we unfold the pyramid to the polygon $AKBLCMDN$ as shown in the figure. Prove that points K, L, M, N are concyclic. ru



(Tibor Bakos and Géza Kós)

Solution 1. Dilate the inscribed sphere from the point S in such a way that its image is tangent to the plane $ABCD$ from the opposite side; we obtain another tangent sphere exscribed to the base face of the pyramid (fig. 2). Denote the points

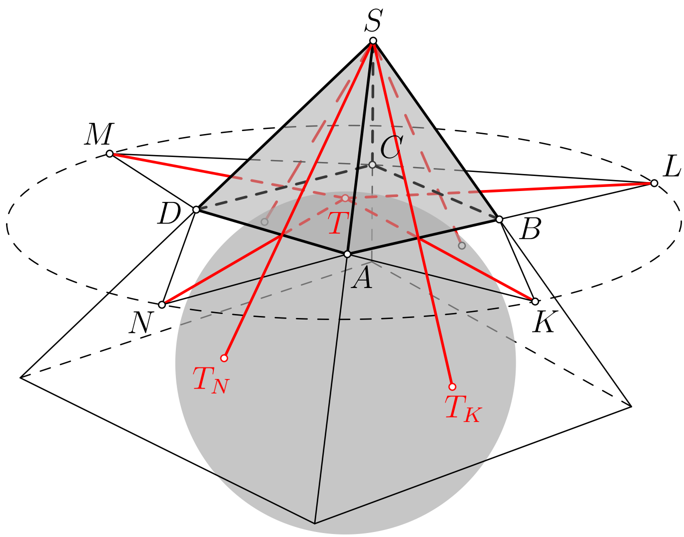


Figure 2: for the solution 1 of the problem 5

of tangency between the excribed sphere and the planes $ABCD$, ABS, BCS, CDS

and DAS by T, T_K, T_L, T_M and T_N, respectively. We will show that $KT = LT = MT = NT$, so points K, L, M and N lie on a circle centred at T.

Notice that the quadrilaterals SBT_KA and $KBTA$ are symmetrical about the external dihedral angle bisector plane between faces $ABCD$ and ABS; this implies that $ST_K = KT$. We can see analogously that $ST_L = LT$, $ST_M = MT$ and $ST_N = NT$. Moreover $ST_K = ST_L = ST_M = ST_N$ because these are tangent segments to the exsphere from S.

Hence, the segments ST_K, KT, ST_L, LT, ST_M, MT, ST_N, NT are all equal.

Note. The statement remains true for all circumscribed n-gon pyramids. For general case, we can repeat solution 1 or solution 2, without changes. Alternatively, one could reduce the general case to the case $n = 4$ by steps $n \mapsto n - 1$. □

Solution 2. We will use the same exsphere as in Solution 1. Denote its center by J. Point J lies in the external dihedral angle bisector plane between faces $ABCD$ and DAS, so $SJ = NJ$ (fig. 3). Repeating this observation for each side face, we can

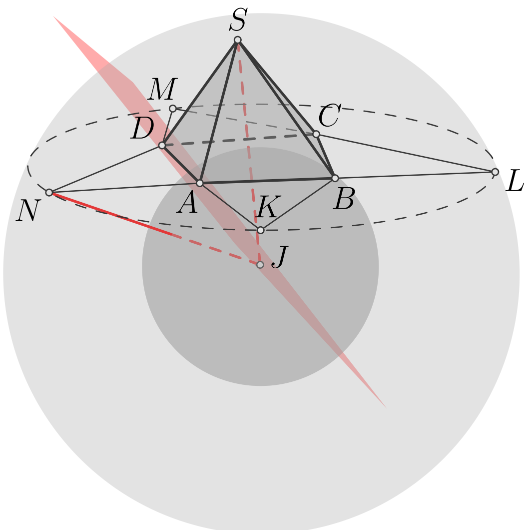


Figure 3: for the solution 2 of the problem 5

see that $SJ = KJ = LJ = MJ = NJ$.

Hence, the points S, K, L, M and N lie on a sphere with center J; therefore K, L, M and N lie in the common part of that sphere with plane $ABCD$ which is a circle. □

Solution 3. Denote the points of tangency between the inscribed sphere and the planes ABS, BCS, CDS and DAS by U_K, U_L, U_M and U_N, respectively.

The segment AS is rotated to AK and AN, so $AS = AK = AN$; analogously we have $BS = BK = BL$, $CS = CL = CM$ and $DS = DM = DN$ (fig. 4).

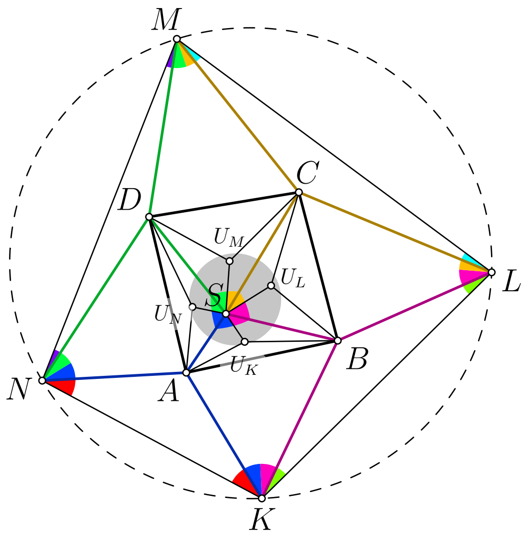


Figure 4: for the solution 3 of the problem 5

Notice that the triangles SAU_K and SAU_N are congruent, so $\angle ASU_K = \angle ASU_N$. Simlarly, we have $\angle BSU_L = \angle BSU_M$, $\angle CSU_M = \angle CSU_N$ and $\angle DSU_N = \angle DSU_K$. These together show that

$$\angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle DSA$$

so

$$\angle AKB + \angle CMD = \angle BLC + \angle DNA\,.$$

Together with the isosceles triangles ANK, BKL, CLM and DMN, we can see that in the quadrilateral $KLMN$ the sum of the opposite angles are equal, so the quadrilateral is cyclic. (Note that the the triangles ANK, BKL, CLM and DMN may degenerate or have opposite orientation. For a complete solution we need to use oriented angles or perform some case consideration.) □

Marking scheme

7 p. for a complete solution.

In the absence of a complete solution, the maximum of the following two sections is taken.

Section 1 (Solutions 1 and 2). The sum of the following points is taken:

1 p. for considering the exsphere;

1 p. for finding two equal segments: either equal tangents to exsphere or segments like SJ and SK that are equal due to the symmetry about the bisector of a dihedral angle.

Section 2 (Solution 3). The maximum of the following points is taken:

3 p. *the sum of the following points:*

- 1 p. for *explicitly* marking or mentioning equal angles in isosceles triangles like ANK;
- 2 p. for just formulating the criteria of circumscribed tetrahedral angle in terms of its angles;

2 p. for reducing the problem to equality $\angle AKB + \angle CMD = \angle BLC + \angle DNA$;

5 p. for reducing the problem to equality $\angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle DSA$ (without proving it or referencing the criteria of circumscribed tetrahedral angle);

Problem 6. Let p be a prime number and let $f(x)$ be a polynomial of degree d with integer coefficients. Assume that the numbers $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(p)$ leave exactly k distinct remainders when divided by p, and $1 < k < p$. Prove that ru

$$\frac{p-1}{d} \leq k-1 \leq (p-1)\left(1-\frac{1}{d}\right).$$

(Dániel Domán, Gyula Károlyi and Emil Kiss)

Solution. For both inequalities we will use the standard

Fact 1. If $h(x)$ is a polynomial with integer coefficients and $m = \deg h < p-1$, then p divides $h(1) + \dots + h(p)$.

Proof of the fact (sketch). We may find the integer coefficients c_0, c_1, ..., c_m such that $h(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)$ (take the leading coefficient of h as c_m, then subtract $c_m x(x-1)\dots(x-m+1)$ from h and induct on degree.) Using the representation

$$x(x-1)\dots(x-s+1) = F_s(x+1) - F_s(x), \quad F_s(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-s)}{s+1}$$

we get

$$\sum_{k=1}^{p} h(k) = \sum_{i=0}^{m} c_i(F_i(p+1) - F_i(1))$$

that is divisible by p, because $F_i(p+1) - F_i(1)$ is the difference of two fractions with the same denominators not divisible by p and with numerators equivalent modulo p. *This concludes the proof of the fact.*

(1) *Proof of* $\frac{p-1}{d} \leq k-1$. Let $u_1, \ldots, u_k$ be all remainders given by $f(1), \ldots, f(p)$ modulo p. Denote $g(x) = (f(x) - u_1) \ldots (f(x) - u_{k-1})$. The polynomial $g(x)$ takes exactly two values modulo p: 0 and $(u_k - u_1) \ldots (u_k - u_{k-1})$. Then $\sum_{k=1}^{p} h(k)$ is not divisible by p and by Fact 1 we get $\deg g \geq p-1$, which is equivalent to $d(k-1) \geq p-1$.

To prove the rest of the statement, we will use the following well-known

Fact 2. Let $w_1, \ldots, w_s$ be (not necessarily distinct) residues modulo p, and $s \leq p-1$. Then the values modulo p of the power sums $r_j := w_1^j + \cdots + w_s^j$ for $j = 1, \ldots, s$ uniquely determine the multiset $\{w_1, \ldots, w_s\}$.

Proof of the fact (sketch). Assume the contrary, i.e., that there exist two different multisets with the same remainders of $r_1, \ldots, r_s$ modulo p. By removing the common elements from these multisets (and decreasing s accordingly), we reduce the fact to the case when our multisets $\{w_1, \ldots, w_s\}$ and $\{u_1, \ldots, u_s\}$ are disjoint.

The values of $r_1, \ldots, r_s$ modulo p uniquely determine the values modulo p of elementary symmetric polynomials

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} w_{i_1} \ldots w_{i_k} \quad \text{for } k = 1, \ldots, s.$$

For example, this follows from Newton identities

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sigma_{k-i} r_i$$

by induction in k (since $k \leq s < p$, the remainder of $k\sigma_k$ modulo p uniquely determines the remainder of σ_k modulo p.) But the numbers $(-1)^i \sigma_i$, $i = 0, \ldots, s$ are the coefficients of the polynomial $(x - w_1) \ldots (x - w_s)$. On the other hand, the values of the polynomials $(x - w_1) \ldots (x - w_s)$ and $(x - u_1) \ldots (x - u_s)$ modulo p are distinct, for example, at $x = u_1$. Contradiction. *This concludes the proof of the fact.*

(2) *Proof that* $k-1 \leq (p-1)(1-\frac{1}{d})$. Now denote $s := p-ks \leq p-2$ and assume that $k-1 > (p-1)(1-\frac{1}{d})$ that reads as $ds < p-1$. The multiset $A = \{f(1), f(2), \ldots, f(p)\}$ of residues modulo p may be represented as

$$A = (\{0, 1, \ldots, p-1\} \setminus \{w_1, \ldots, w_s\}) \cup \{u_1, \ldots, u_s\},$$

where $w_1, \ldots, w_s$ are the residues not taken by f, and $u_1, \ldots, u_s$ are the residues taken more than once (with multiplicity taken into account). Since the polynomials $f(x), (f(x))^2, \ldots, (f(x))^s$ have degrees less than $p-1$, using Fact 1 we get

$$\sum_{a \in A} a^j = \sum_{k=1}^{p} (f(k))^j \equiv 0 \pmod{p}, \quad j = 1, \ldots, s.$$

On the other hand, modulo p we have

$$\sum_{a\in A} a^j = \sum_{i=1}^{p} i^j + \sum_{i=1}^{s} w_i^j - \sum_{i=1}^{s} u_i^j = \sum_{i=1}^{s} w_i^j - \sum_{i=1}^{s} u_i^j\,, \quad j \le p-2.$$

Therefore the multisets $\{w_1, \ldots, w_s\}$ and $\{u_1, \ldots, u_s\}$ coincide by Fact 2. Contradiction. $\square$

Marking scheme

The sum of the following points is taken:

2 p. for proving lower bound (left inequality). In the absence of a complete proof, the sum of the following points is taken:

- 1 p. for writing the correct polynomial $g(x)$ (see solution).
- 1 p. for proving that $\deg(g(f(x)) \ge p-1$.

5 p. for proving upper bound (right inequality). In the absence of a complete proof, the sum of the following points is taken:

- 2 p. for the idea of comparing the set of the absent values and the multiset of the multiply attained values;
- 1 p. for stating that the sums of powers (up to $p-k$) of the sets mentioned above are equal;
- 2 p. for proving Fact 2 (knowledge of the sums of powers is enough to determine the multiset); *or*
  - 1 p. for just stating the above statement.

If the above points do not apply, the sum of the following points is taken:

1 p. for proving Fact 1 (if the degree of a polynomial is less than $p-1$, then the sum of its values over all residues is divisible by p)

Note that no points will be deducted for the absence of this proof in an otherwise correct solution.

1 p. for stating that we need to find certain $g(x)$ with $\deg g = k-1$ or $\deg g = p-k$ and then prove $\deg g(f(x)) \ge p-1$.

The following advancements are not awarded with points:

0 p. for considering cases $d=1$, $d=2$, $d=p-1$;

0 p. for proving inequality $dk \ge p$.

Русский

День 1

Задача 1. Даны простые числа p, q, r и целое положительное n такие, что величины en

$$\frac{p+n}{qr}, \ \frac{q+n}{rp}, \ \frac{r+n}{pq}$$

являются целыми числами. Докажите, что $p = q = r$. *(Nazar Agakhanov)*

Решение. Без ограничения общности, мы можем считать $p \geqslant q \geqslant r$.

Так как $p \mid q + n$ и $p \mid r + n$, то $p \mid q - r$, но $0 \leqslant q - r < q \leqslant p$, откуда следует $q = r$. Кроме того, из условий $q \mid p + n$ и $q \mid r + n$ следует, что $q \mid p - r = p - q$, поэтому $q \mid p$, что возможно лишь в случае $p = q = r$. □

Задача 2. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор *подписчиков* среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью. en

Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели. *(Vladislav Novikov)*

Решение. Пусть n — количество человек в социальной сети. Будем следить только за остатками рейтингов от деления на m. Цель хакера — сделать все n остатков равными 0.

Если бы хакеру разрешалось менять рейтинг более одного раза в день, то он смог бы достичь своей цели уже в первый день. Действительно, он мог бы сначала прибавить несколько раз рейтинг первому пользователю так, чтобы он стал равен 0 по модулю m, далее аналогично второму и т. д. В остальные дни хакер может не делать ничего, и рейтинги всех пользователей, начиная со второго дня, будут равны нулю. Назовём это *изначальной стратегией.*

Докажем теперь, что хакер может сделать те же самые изменения рейтингов, но в разные дни, чтобы через некоторое время рейтинги всех пользователей стали равны 0.

Будем представлять состояния социальной сети с помощью векторов, состоящих из n остатков по модулю m (соответствующих рейтингам пользователей). Такие вектора можно *складывать* по модулю m. Например, если $m = 4$ и $n = 6$, то

$$(1, 2, 3, 0, 2, 1) + (2, 3, 3, 0, 2, 3) = (3, 1, 2, 0, 0, 0)\,.$$

Если прямо перед полуночью был вектор X, обозначим за $f(X)$ вектор состояний после полуночи.

Лемма.

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y)\,.$$

Доказательство леммы. Нужно показать, что вектора $f(X+Y)$ и $f(X)+f(Y)$ совпадают на каждой позиции, т. е. для каждого пользователя. Рассмотрим произвольного пользователя, пусть его зовут Боб. Пусть в расстановке X у Боба остаток рейтинга b_x, а у его подписчиков суммарно s_x (сумма берётся по модулю m). Пусть в расстановке Y у Боба рейтинг b_y, у его подписчиков суммарно s_y.

Тогда у Боба в $f(X)$ будет $b_x + s_x$, в $f(Y)$ будет $b_y + s_y$, а в $f(X + Y)$ будет $b_x + b_y + s_x + s_y$. *Лемма доказана.*

Давайте поймём, как одно действие хакера влияет на вектор в будущем. Пусть в какой-то день был вектор X, тогда, если бы хакер не вносил никаких изменений, мы получили бы последовательность векторов

$$X,\ f(X),\ f(f(X)),\ \ldots,\ f^k(X),\ \ldots$$

где f^k обозначает k раз применённое преобразование f.

Если в первый день хакер увеличит у Боба рейтинг на 1, а больше изменений вносить не будет, то мы получим последовательность

$$X + b,\ f(X + e_b) = f(X) + f(e_b),\ \ldots,\ f^k(X) + f^k(e_b),\ \ldots,$$

где в векторе $e_b = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ единичка стоит на месте, соответствующем Бобу. Таким образом, через k дней разница будет $f^k(e_b)$. Аналогично показывается следующее: пусть есть вектор X, и две стратегии хакера, которые отличаются только прибавлением e_b в один из дней. Тогда через k дней результаты этих стратегий будут отличаться на $f^k(e_b)$.

Каждый вектор в последовательности $(f^k(e_b))$ определяется по предыдущему, а всего различных векторов не более чем m^n. Поэтому последовательность $(f^k(e_b))$ периодична, возможно, с предпериодом. Пусть T_b — длина периода. Заметим, что если поменять стратегию хакера, заменив прибавление e_b в один из дней на прибавление e_b ровно через T_b дней, то результаты этих стратегий рано или поздно (не позднее чем через m^n дней) перестанут отличаться.

Теперь будем последовательно переносить все изменения рейтингов из первого дня в другие дни так, чтобы действия хакера совершались в разные дни. Это можно сделать, так как для каждого действия можно прибавлять соответствующий период сколько угодно раз.

Таким образом, мы получим стратегию для хакера, результат которой через некоторое время (не более, чем через m^n дней после последнего изменения) не отличается от изначальной стратегии с изменениями всех рейтингов в первый день. Результатом изначальной стратегии в этот момент времени будет вектор из всех нулей. Таким образом, результатом нашей новой стратегии с не более чем одним изменением в день тоже будет нулевой вектор. $\square$

Задача 3. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через I и перпендикулярна прямой IO. Прямая ℓ, симметричная прямой BC относительно s, пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно (K и L отличны от A). Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой IO. *(Dušan Djukić)* en

Решение 1. Пусть вписанная окружность ω касается прямых BC, CA, AB и KL в точках D, E, F и G соответственно. Обозначим центр описанной окружности треугольника AKL через U.

Так как $DG \parallel IO$ и $\angle KIG = \angle KFG = \angle FDG = \angle FDI + \angle IDG = \angle KBI + \angle OIG$ (равенство ориентированных углов), мы имеем $\angle KIO = \angle KBI$. Из этого следует, что описанная окружность треугольника BIK касается прямой IO. Аналогично, описанная окружность треугольника CIL касается прямой IO.

Рассмотрим инверсию относительно окружности ω (рис. 5). При этой инверсии точки A, B, C, K и L переходят в середины A', B', C', K' и L' отрезков EF, FD, DE, FG и EG соответственно. Образами описанных окружностей треугольников BIK и CIL служат прямые $B'K'$ и $C'L'$, а значит, эти прямые параллельны IO. Описанные окружности треугольников ABC и AKL переходят в описанные окружности треугольников $A'B'C'$ и $A'K'L'$, центры которых обозначим через O_1 и U_1 соответственно. Ясно, что $O_1 \in IO$, $U_1 \in IU$.

Так как $B'C'L'K'$ — параллелограмм и $\angle L'A'K' = \angle FGE = 180^\circ - \angle EDF = 180^\circ - \angle B'A'C'$, параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{B'K'} = \overrightarrow{C'L'}$ переводит описанную окружность треугольника $A'B'C'$ в описанную окружность треугольника $A'K'L'$, и тогда прямая O_1U_1 параллельна прямой IO. Следовательно, U_1 лежит на прямой IO, и точка U — тоже. $\square$

Решение 2. Пусть вписанная окружность ω касается прямых BC, AC, AB и KL в точках D, E, F и G соответственно. Заметим, что $GD \perp s$, откуда $GD \parallel IO$. Обозначим центр описанной окружности треугольника $\triangle AKL$ через U. Мы будем использовать следующий известный факт:

Лемма. Прямая IO служит прямой Эйлера для треугольника DEF.

Доказательство леммы. Рассмотрим инверсию относительно вписанной окруж-

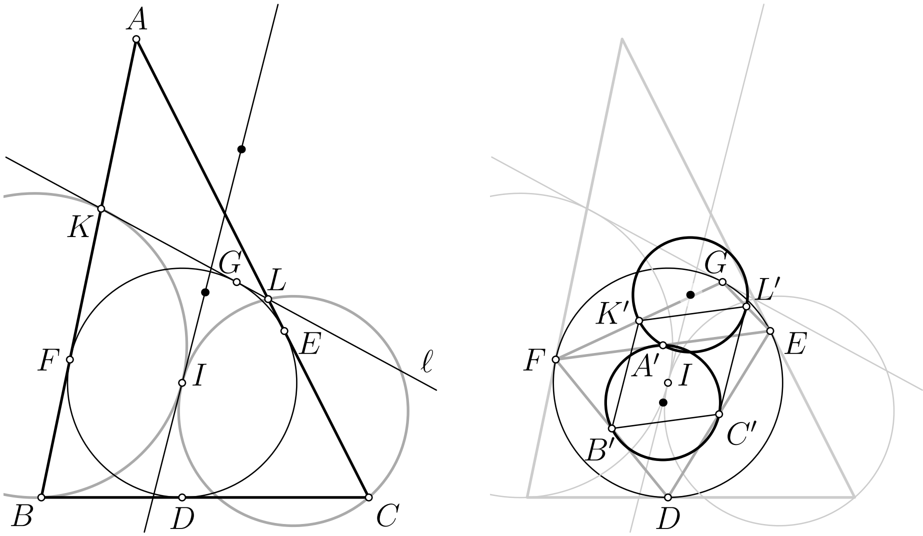


Рис. 5: к решению задачи 3

ности ω. Точки A, B, C по действием этой инверсии перейдут в середины отрезков EF, FD и DE, а значит, описанная окружность треугольника ABC перейдёт в окружность девяти точек треугольника DEF. Следовательно, центр окружности девяти точек треугольника DEF лежит на прямой IO, то есть точка O лежит на прямой Эйлера треугольника DEF. *Лемма доказана.*

Согласно лемме, точка M пересечения медиан треугольника DEF лежит на прямой IO. Аналогично, точка N пересечения медиан треугольника GEF лежит на прямой IU. Однако, $MN \parallel DG \parallel IO$, откуда следует, что точка U лежит на прямой IO. $\square$

Решение 3. Обозначим через $\delta(X, \overrightarrow{a})$ ориентированное расстояние от точки X до прямой $\overrightarrow{a}$.

Лемма. Точка X плоскости лежит на прямой s тогда и только тогда, когда

$$f(X) = \delta(X, \overrightarrow{BC}) + \delta(X, \overrightarrow{CA}) + \delta(X, \overrightarrow{AB}) = 3r,$$

где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Доказательство леммы. Ориентированное расстояние от точки до фиксированной прямой — линейная функция. Следовательно, $f(X)$ — также линейная функция (неконстантная, так как треугольник ABC неравносторонний), а значит, геометрическим местом точек X плоскости, удовлетворяющим соотношению $f(X) = 3r$, служит некоторая прямая s'. Так как $f(I) = 3r$, имеем $I \in s'$.

Заметим, что если ℓ_a, ℓ_b and ℓ_c — серединные перпендикуляры к отрезкам BC, CA и AB, направленные внутрь треугольника, то тогда $\delta(I,\ell_a)+\delta(I,\ell_b)+\delta(I,\ell_c)=\sum_{cyc}(p-c-\frac{a}{2})=0$. Повернув на $90°$, делаем вывод, что $f(X)$ остаётся постоянной при движении точки X по любой прямой, перпендикуряной IO (в том числе по прямой s). *Лемма доказана.*

Обозначим центр описанной окружности треугольника AKL через U. Рассмотрев треугольник AKL с вневписанной окружностью ω, мы аналогично получаем

Следствие. Точка X плоскости лежит на прямой s_1, проходящей через I и перпендикулярной IU, тогда и только тогда, когда

$$f_1(X)=-\delta(X,\overrightarrow{KL})+\delta(X,\overrightarrow{LA})+\delta(X,\overrightarrow{AK})=3r\,.$$

(Это функция не константа, так как, например, $f_1(A)$ отрицательно.)

При $X\in s$ имеем $\delta(X,\overrightarrow{BC})=-\delta(X,\overrightarrow{KL})$, откуда следует $f_1(X)=f(X)=3r$. Следовательно, прямые s и s_1 совпадают, т. е. точка U лежит на прямой IO. $\square$

День 2

Задача 4. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку „сдал“ к концу экзамена?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал». en

После того, как все студенты получат оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт.

Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку «сдал»? *(Denis Afrizonov)*

Решение. Опишем, как договориться студентам, чтобы всем сдать экзамен. Рассмотрим конкретного студента Василия. Пусть Василий представит, что преподаватель поставит ему оценку «не сдал», а всем, кто отвечает после него — оценку «сдал». Тогда в качестве ответа Василий назовёт суммарное количество оценок «сдал», полученных студентами в этом случае. Иначе говоря, если k студентов получили оценку «не сдал», то Василий назовёт число $99-k$.

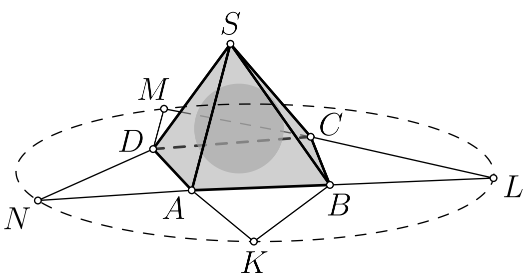
Докажем, что придерживаясь такой стратегии, все студенты сдадут экзамен. Если все студенты получили оценку «сдал», то они добились своей цели. Иначе рассмотрим последнего студента Петра, который получил оценку «не сдал».

Поскольку после Петра все получили оценку «сдал», то Пётр ответил на вопрос правильно. Таким образом, инспектор заменит все оценки на «сдал».

Замечание. Такая стратегия студентов — единственно возможная.

Действительно, допустим, что первые несколько студентов (возможно, никто) придерживаются указанной стратегии, а Василий — первый, кто назвал число, не соответствующее описанной стратегии. Тогда преподаватель может поставить ему оценку «не сдал», а всем после него — оценку «сдал». В этом случае Василий дал неверный ответ, а все, кто получил оценку «не сдал» (они отвечали до Василия), назвали число, которое больше реального числа оценок «сдал». □

Задача 5. Дана выпуклая четырехугольная пирамида с вершиной S и основанием $ABCD$, причём существует сфера, вписанная в эту пирамиду (то есть расположенная внутри пирамиды и касающаяся всех её граней). Пирамиду разрезали по рёбрам SA, SB, SC, SD и отогнули грани SAB, SBC, SCD, SDA вовне на плоскость $ABCD$ так, что получился многоугольник $AKBLCMDN$, как показано на рисунке. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности. en



(Tibor Bakos and Géza Kós)

Решение 1. Сделаем гомотетию с центром в S, переводящую вписанную сферу в сферу, касающуюся плоскости $ABCD$ с противоположной стороны; таким образом мы получим вневписанную сферу (рис. 6). Обозначим точки касания этой вневписанной сферы с плоскостями $ABCD$, ABS, BCS, CDS и DAS через T, T_K, T_L, T_M и T_N соответственно. Покажем, что $KT = LT = MT = NT$, т. е., что K, L, M и N лежат на одной окружности с центром T.

Заметим, что четырехугольники SBT_KA и $KBTA$ симметричны относительно внешней биссекторной плоскости двугранного угла между гранями $ABCD$ и ABS; отсюда следует, что $ST_K = KT$. Аналогично $ST_L = LT$, $ST_M = MT$ и $ST_N = NT$. Кроме того, $ST_K = ST_L = ST_M = ST_N$, так как это отрезки касательных к вневписанной сфере, проведенных из S.

Значит, отрезки ST_K, KT, ST_L, LT, ST_M, MT, ST_N, NT равны.

Замечание. Утверждение, аналогичное утверждению задачи, верно для любой

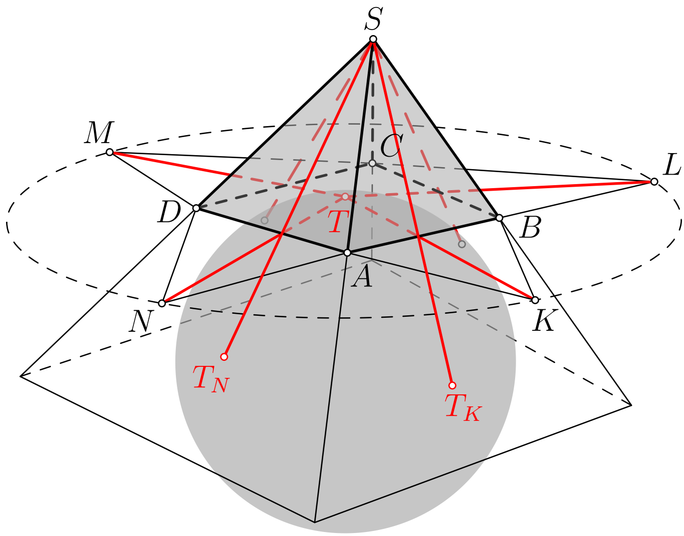


Рис. 6: к решению 1 задачи 5

описнной n-угольной пирамиды. Для общего случая решения 1 и 2 остаются в силе. Кроме того, общий случай можно спуском $n \mapsto n-1$ свести к случаю $n = 4$. □

Решение 2. Будем использовать ту же вневписанную сферу, что и в решении 1. Обозначим её центр через J. Точка J лежит на внешней биссекторной плоскости между гранями $ABCD$ и DAS, таким образом, $SJ = NJ$ (рис. 7). Повторяя эти рассуждения для всех боковых граней, имеем $SJ = KJ = LJ = MJ = NJ$.

Значит, точки S, K, L, M и N лежат на сфере с центром J; и поэтому K, L, M и N лежат на пересечении этой сферы с плоскостью $ABCD$, т. е. на окружности. □

Решение 3. Обозначим точки касания вписанной сферы с плоскостями ABS, BCS, CDS и DAS через U_K, U_L, U_M и U_N соответственно.

Отрезок AS на развертке соответствует отрезкам AK и AN, поэтому $AS = AK = AN$; аналогично $BS = BK = BL$, $CS = CL = CM$ и $DS = DM = DN$. (рис. 8).

Заметим, что треугольники SAU_K и SAU_N равны, поэтому $\angle ASU_K = \angle ASU_N$. Аналогично $\angle BSU_L = \angle BSU_M$, $\angle CSU_M = \angle CSU_N$ и $\angle DSU_N = \angle DSU_K$. Отсюда

$$\angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle DSA\,,$$

а значит,

$$\angle AKB + \angle CMD = \angle BLC + \angle DNA\,.$$

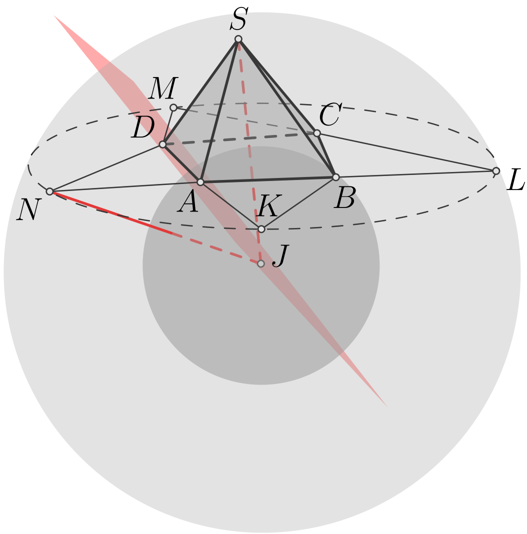


Рис. 7: к решению 2 задачи 5

Учитывая равные углы в равнобедренных треугольниках ANK, BKL, CLM и DMN, мы видим, что в четырёхугольнике $KLMN$ суммы противоположных углов равны, поэтому он вписанный. (Заметим, что треугольники ANK, BKL, CLM и DMN могут вырождаться или иметь противоположную ориентацию. Для полного решения здесь следует использовать ориентированные углы или сделать разбор случаев разного расположения.) □

Задача 6. Пусть p — простое число, а $f(x)$ — многочлен степени d с целыми коэффициентами такой, что числа $f(1)$, $f(2)$, …, $f(p)$ дают ровно k различных остатков при делении на p, причём $1 < k < p$. Докажите, что en

$$\frac{p-1}{d} \leqslant k-1 \leqslant (p-1)\left(1-\frac{1}{d}\right).$$

(Dániel Domán, Gyula Károlyi and Emil Kiss)

Решение. Для доказательства обоих неравенств воспользуемся следующим стандартным утверждением:

Факт 1. Если $h(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $m = \deg h < p-1$, то p делит $h(1) + \dots + h(p)$.

Доказательство факта (набросок). Найдём такие целые коэффициенты c_0, c_1, …, c_m, что $h(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)$ (беzем за c_m старший коэффициент h, далее вычитаем из h многочлен $c_m x(x-1)\dots(x-m+1)$ и

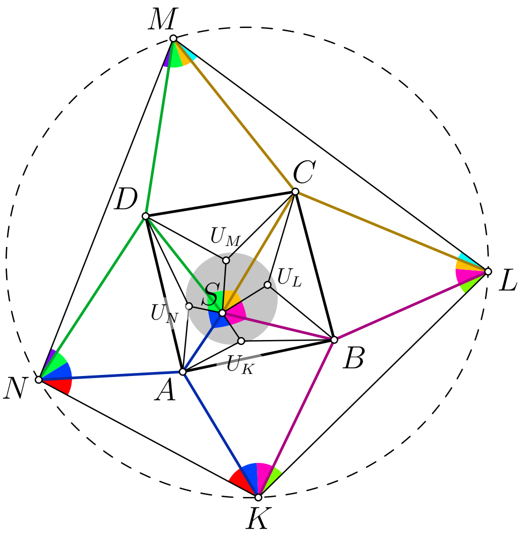


Рис. 8: к решению 3 задачи 5

применяем индукцию по степени.) Используя представление

$$x(x-1)\dots(x-s+1)=F_s(x+1)-F_s(x),\quad F_s(x)=\frac{x(x-1)\dots(x-s)}{s+1}\,.$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{p}h(k)=\sum_{i=0}^{m}c_i(F_i(p+1)-F_i(1))\,,$$

что кратно p, поскольку у дробей в каждой скобке равные знаменатели, не кратные p, а числители сравнимы по модулю p. *Это завершает доказательство факта.*

(1) *Доказательство неравенства* $\frac{p-1}{d}\leqslant k-1$. Пусть $u_1,\,\dots,\,u_k$ — все возможные остатки, которые числа $f(1),\,\dots,\,f(p)$ дают по модулю p. Положим $g(x)=(f(x)-u_1)\dots(f(x)-u_{k-1})$. Многочлен $g(x)$ по модулю p принимает ровно два значения: 0 и $(u_k-u_1)\dots(u_k-u_{k-1})$. Тогда $\sum_{k=1}^{p}h(k)$ не кратно p и по факту 1 получаем $\deg g\geqslant p-1$, то есть $d(k-1)\geqslant p-1$.

Далее нам понадобится следующий хорошо известный

Факт 2. Пусть $w_1,\,\dots,\,w_s$ — не обязательно различные остатки по модулю p, и $s\leqslant p-1$. Тогда значения по модулю p сумм $r_j:=w_1^j+\dots+w_s^j$ при $j=1,\dots,s$ однозначно определяют мультимножество $\{w_1,\dots,w_s\}$.

Доказательство факта (набросок). Предположим противное, то есть есть два различных мультимножества остатков с одинаковыми значениями $r_1,\,\dots,\,r_s$

по модулю p. Удаляя из обоих мультимножеств их общие элементы (и соответственно уменьшая s), сводим факт к случаю, когда наши мультимножества $\{w_1, \ldots, w_s\}$ и $\{u_1, \ldots, u_s\}$ не пересекаются. Значения r_1, …, r_s по модулю p однозначно определяют значения по модулю p элементарных симметрических многочленов

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} w_{i_1} \ldots w_{i_k} \quad \text{при } k = 1, \ldots, s.$$

Это следует, например, из тождеств Ньютона

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sigma_{k-i} r_i$$

с помощью индукции по k (благодаря тому, что $k \leqslant s < p$, значение $k\sigma_k$ по модулю p определяет значение σ_k по модулю p.) Числа $(-1)^i \sigma_i$, $0 \leqslant i \leqslant s$ — это коэффициенты многочлена $(x - w_1) \ldots (x - w_s)$. Но значения многочленов $(x - w_1) \ldots (x - w_s)$ и $(x - u_1) \ldots (x - u_s)$ различны по модулю p, например, в точке $x = u_1$. Противоречие. *Это завершает доказательство факта.*

(2) *Доказательство неравенства* $k-1 \leqslant (p-1)(1-\frac{1}{d})$. Обозначим $s := p-k \leqslant p-2$ и предположим, что $k-1 > (p-1)(1-\frac{1}{d})$, то есть $ds < p-1$. Мультимножество $A = \{f(1), f(2), \ldots, f(p)\}$ остатков по модулю p может быть представлено как

$$A = (\{0, 1, \ldots, p-1\} \setminus \{w_1, \ldots, w_s\}) \cup \{u_1, \ldots, u_s\},$$

где w_1, …, w_s — остатки, не принимаемые значениями многочлена f, а u_1, …, u_s — остатки, принимаемые более одного раза (с учётом кратности). Поскольку многочлены $f(x), (f(x))^2, \ldots, (f(x))^s$ имеют степени меньше чем $p-1$, с помощью факта 1 получаем

$$\sum_{a \in A} a^j = \sum_{k=1}^{p} (f(k))^j \equiv 0 \pmod{p}, \quad j = 1, \ldots, s.$$

С другой стороны, по модулю p имеем

$$\sum_{a \in A} a^j = \sum_{i=1}^{p} i^j + \sum_{i=1}^{s} w_i^j - \sum_{i=1}^{s} u_i^j = \sum_{i=1}^{s} w_i^j - \sum_{i=1}^{s} u_i^j, \quad j \leqslant p-2.$$

Таким образом, по факту 2 мультимножества $\{w_1, \ldots, w_s\}$ и $\{u_1, \ldots, u_s\}$ совпадают. Противоречие. □