4. Олимпијада метропола

Математика · Први дан: 3.9.2019.

1. задатак. Прости бројеви p, q и r и природан број n су такви да су бројеви

$$\frac{p+n}{qr}, \quad \frac{q+n}{rp} \quad \text{и} \quad \frac{r+n}{pq}$$

цели. Доказати да је $p = q = r$.

2. задатак. Дат је природан број m. На друштвеној мрежи са фиксним коначним скупом чланова, сваки члан има непромењљив скуп *пратилаца* међу осталима. У почетку сваки члан има целобројан *рејтинг* (не обавезно исти за све чланове). Рејтинг сваког члана се сваке поноћи увећава за збир претпоноћних рејтинга његових пратилаца.

Хакер, који није члан мреже, жели да рејтинзи свих чланова буду дељиви са m. Он сваког дана може да одабере једног члана и увећа му рејтинг за 1, или да ништа не мења. Доказати да хакер за коначан број дана може да постигне свој циљ.

3. задатак. У неједнакостраничном троуглу ABC тачка I је центар уписаног, а O центар описаног круга. Права s кроз тачку I је нормална на праву IO. Права ℓ, симетрична правој BC у односу на s, сече дужи AB и AC редом у тачкама K и L (различитим од A). Доказати да центар описаног круга троугла AKL лежи на правој IO.

4. Олимпијада метропола

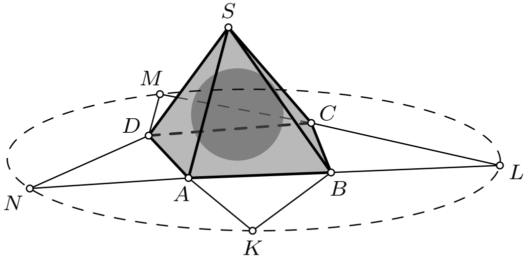
Математика · Други дан: 4.9.2019.

4. задатак. Испит полаже 100 студената. Професор их прозива једног по једног и поставља им само једно питање: „Међу ових 100 студената, колико њих ће положити овај испит?” Одговор студента мора бити цео број. Чим добије одговор, професор пред свима даје студенту једну од оцена „положио” и „пао”.

Када сви студенти буду оцењени, доћи ће инспекција да провери има ли студената који су дали тачан одговор, али су пали. Ако постоји неки такав студент, професор ће бити суспендован, а сви студенти добиће оцену „положио”. У супротном неће бити измена.

Могу ли студенти осмислити стратегију која им свима гарантује оцену „положио”?

5. задатак. Дата је конвексна четворострана пирамида с врхом S и основом $ABCD$ која има уписану сферу (тј. сферу унутар пирамиде која додирује све њене стране). Сечењем дуж ивица SA, SB, SC и SD и ротирањем страна SAB, SBC, SCD и SDA ка спољашњости до равни $ABCD$ пирамиду размотавамо у многоугао $AKBLCMDN$ као на слици. Доказати да су тачке K, L, M и N концикличне.



6. задатак. Нека је p прост број, а $f(x)$ полином степена d са целим коефицијентима. Претпоставимо да бројеви $f(1), f(2), \ldots, f(p)$ дају тачно k различитих остатака при дељењу са p, где је $1 < k < p$. Доказати да важи

$$\frac{p-1}{d} \leqslant k-1 \leqslant (p-1)\left(1-\frac{1}{d}\right).$$