Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Београд – 26. мај 2019.

Први дан

1. **(а)** Дато је 2019 различитих целих бројева који немају непарне просте делиоце мање од 37. Доказати да постоје два од датих бројева чији збир нема непаран прост делилац мањи од 37.

(б) Да ли тврђење остаје тачно ако се 37 (на оба места) замени са 38?

(Душан Ђукић)

2. Унутар троугла ABC ($AC \neq BC$) дата је тачка D таква да је испуњено $\sphericalangle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. Тангенте у тачки C на кружнице описане око $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ секу праве AB и AD, редом, у тачкама P и Q. Доказати да права PQ полови угао BPC. *(Душан Ђукић)*

3. Дати су природан број n и кружница обима n. На кружници су, у смеру казаљке на сату, записани бројеви $0, 1, \ldots, n-1$, у овом редоследу и на једнаком одстојању. Сваки број је обојен црвеном или плавом бојом, и постоји бар један ненула број од сваке боје. Познато је да постоји скуп $S \subsetneq \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $|S| \geqslant 2$, за који важи: ако је (x, y) кружни лук чији су крајеви различите боје и чија дужина је у S (где лук посматрамо од x до y у смеру казаљке на сату), тада $y \in S$. Доказати да постоји делилац d броја n, различит од 1 и n, за који важи: ако је (x, y) кружни лук чији су крајеви различите боје и чија је дужина дељива са d, тада су и x и y дељиви са d.

(Бојан Башић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Београд – 27. мај 2019.

Други дан

4. Богати трговац има три расе коња у својим шталама, и то тачно b_j коња расе j (за $j = 1, 2, 3$). Он жели да подели наследство својим трима синовима. Зна се да би син i за коња расе j $(i, j = 1, 2, 3)$ платио тачно a_{ij} златника, при чему за свака два различита i и j важи $a_{ii} > a_{ij}$ и $a_{jj} > a_{ij}$. Доказати да постоји природан број n такав да, кад год важи $\min\{b_1, b_2, b_3\} > n$, трговац може расподелити своје коње својим синовима на такав начин да сваки син, вреднујући и своје и туђе коње по сопственим критеријумима, сматра да управо његови коњи највише вреде. *(Никола Петровић)*

5. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$2^x = 5^y + 3.$$

(Бојан Башић)

6. Назовимо *фигурицом* полиедар са $26^{5^{2019}}$ страна. На свакој страни фигурице је уписан по један број. Приликом бацања две фигурице у ваздух (са не нужно истим скупом уписаних бројева) побеђује она која падне на страну на којој је већи број; уколико се добију исти бројеви, бацање се понавља све док се не добију различити бројеви. Кажемо да једна фигурица *надвладава* другу уколико има већу вероватноћу победе приликом бацања (могуће је и да ниједна од две фигурице не надвладава другу). Сматрати да свака фигурица има исту вероватноћу падања на сваку своју страну.

Милисав и Милојка имају по једну фигурицу без уписаних бројева. Прво Милисав уписује $26^{5^{2019}}$ (не нужно различитих) природних бројева на своју фигурицу (на сваку страну по један), при чему збир уписаних бројева износи $27^{5^{2019}}$. Видевши његову фигурицу, Милојка потом на своју фигурицу уписује (могуће неке друге) природне бројеве чији је збир такође $27^{5^{2019}}$. Може ли она то увек учинити на такав начин да добије фигурицу која надвладава Милисављеву? *(Бојан Башић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

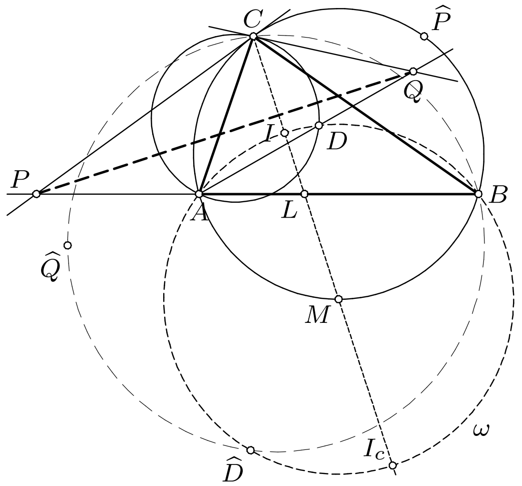
РЕШЕЊА

1. **(а)** Сваком броју x доделимо низ $\bar{x} = (x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, x_{17}, x_{19}, x_{23}, x_{29}, x_{31})$, где је $x_p = 1$ ако x даје један од остатака $1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ при дељењу са p, и $x_p = -1$ у супротном. Јасно је да, ако је $x_p = y_p$, збир $x + y$ није дељив са p. Ових низова има највише $2^{10} = 1024$, па постоје два дата броја x и y са $\bar{x} = \bar{y}$, и онда $x + y$ није дељиво ниједним од простих бројева $3, 5, \dots, 31$.

(б) У овом случају имамо низове $(x_3, x_5, \dots, x_{37})$ дужине 11. Могућих низова има $2^{11} = 2048$: означимо их са $e_1, e_2, \dots, e_{2048}$. По Кинеској теореми о остацима, за свако $e_n = (x_3, x_5, \dots, x_{37})$ постоји $y_n \in \mathbb{Z}$ такво да је $y_n \equiv x_p \pmod p$ за $p = 3, 5, \dots, 37$. За свака два броја y_i, y_j $(1 \leqslant i < j \leqslant 2048)$ постоји прост број p тако да се e_i и e_j разликују у позицији која одговара p, и онда $p \mid y_i + y_j$. Дакле, тврђење више није тачно.

2. Означимо са I центар уписаног круга $\triangle ABC$. Нека права CI сече страницу AB у тачки L и поново описани круг $\triangle ABC$ у тачки M. Тачка M је центар описаног круга ω троугла AIB. Како је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$, тачка D је такође на кругу ω.

Како је $PC^2 = PA \cdot PB$ и $QC^2 = QA \cdot QD$, тачке P и Q имају једнаке потенције у односу на кругове C (с полупречником нула) и ω, па је PQ радикална оса ових двају кругова. Дакле, права PQ је нормална на праву која спаја центре ова два круга, а то је права CL. Како је $\sphericalangle PCL = \sphericalangle PCA + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBA + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle CLP$, тј. $PL = PC$, следи да права PQ полови угао CPL.



Друго решење. Означимо са $\widehat{X}$ слику ма које тачке X при инверзији са центром C и квадратом полупречника $CA \cdot CB$, компонованој са симетријом у односу на праву CI. Тачке A и B се сликају једна у другу. Како се I слика у центар приписаног круга I_c наспрам C, круг ω се слика у себе, па је $\widehat{D} \in \omega$. Даље, кругови ABC и ADC се редом сликају у праве AB и $B\widehat{D}$. Тангенте у тачки C на кругове ABC и ADC, редом, сликају се у праве кроз C паралелне правим AB и $B\widehat{D}$. Према томе, $BAC\widehat{P}$ и $CB\widehat{D}\widehat{Q}$ су једнакокраки трапези ($C\widehat{P} \parallel AB$ и $C\widehat{Q} \parallel B\widehat{D}$), а M лежи на симетрали дужи $B\widehat{D}$, што је уједно и симетрала дужи $C\widehat{Q}$.

Треба доказати да је $\sphericalangle CPB = 2\sphericalangle CPQ$, тј. $\sphericalangle CA\widehat{P} = 2\sphericalangle C\widehat{Q}\widehat{P}$. Ово одмах следи јер је $M\widehat{P} = MC = M\widehat{Q}$, тј. тачка M Је центар круга $C\widehat{P}\widehat{Q}$, па је $\sphericalangle CA\widehat{P} = \sphericalangle CM\widehat{P} = 2\sphericalangle C\widehat{Q}\widehat{P}$.

3. Сва сабирања и одузимања у задатку су по модулу n.

Додавање нуле у S не ремети услове задатка (заиста, $S \neq \{1, 2, \dots, n-1\}$, јер постоји x које није исте боје као 0, па би из $n - x \in S$ следило $0 \in S$), па можемо да сматрамо да $0 \in S$. Приметимо и да из услова следи:

($*$) Ако су a и b различите боје и $c-a, c-b \in S$, онда $c \in S$.

Претпоставимо да тврђење задатка не важи.

Лема. Постоји $d < n$ такво да $kd \in S$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$.

Доказ. Одаберимо елемент $r \in S \setminus \{0\}$, рецимо да је црвен. Можемо да сматрамо да је и нула црвена (њеном променом боје не ремете се услови). За неко y, међу бројевима $y, y+r, y+2r, \dots, y+\frac{n}{(n,r)}r = y$ има и црвених и плавих, што значи да постоји плаво x такво да је $x-r$ црвено.

Индукцијом по k следи да су $kx, kx+r \in S$ за све $k \in \mathbb{N}_0$. Заиста, за $k=0$ то је тривијално, а ако је $k>0$, из ($*$) за $(a,b)=(x,x-r)$ следи $kx \in S$, а одатле из ($*$) за $(a,b)=(x,r)$ следи $kx+r \in S$.

Посматрајмо најмање d из Леме. Како је $\{kd' \mid k \in \mathbb{N}_0\} = \{kd \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subset S$, где је $d' = \text{нзд}(n,d) \leqslant d$, мора бити $d'=d$, тј. $d \mid n$. С друге стране, $d>1$.

Претпоставимо да, супротно тврђењу задатка, постоји x такво да су x и $x+d$ различите боје, али $d \nmid x$. Показујемо индукцијом по $i \in \mathbb{N}_0$ да важи

$$ix + jd \in S \quad \text{за све} \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Ово важи за $i=0$, док у случају $i \geqslant 1$ из ($*$) за $(a,b)=(x,x+d)$ и индуктивне претпоставке следи да $ix+jd \in S$, што завршава индукцију. Према томе, сви бројеви облика $ix+jd$ су у S, а они укључују све бројеве облика $k \cdot \text{нзд}(d,x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, што је противно минималности броја d.

<u>*Друго решење.*</u> Приметимо следеће:

($\bullet$) Ако су $a, b \in S$ различите боје, онда је $a+b \in S$.

Заиста, ако је без смањења општости a различите боје од $a+b$, онда из $b \in S$ следи $a+b \in S$.

Означимо са P и C редом скупове плавих и црвених елемената скупа S.

Нека је $t = \text{нзд}(S \cup \{n\})$. Докажимо да је $\text{нзд}(P \cup \{n\}) = s$ или $\text{нзд}(C \cup \{n\}) = s$. Одаберимо бројеве $s_1, s_2, \dots, s_r \in S$ (не обавезно различите) такве да је

$$s_1 + \dots + s_r \equiv t \pmod{n} \quad \text{и} \quad r \text{ је најмање могуће.}$$

Ако међу овим бројевима постоје два различитих боја, рецимо s_i и s_j, онда је $s_i + s_j \in S$, па појединачне бројеве s_i и s_j можемо да заменимо њиховим збиром, противно минималности броја r. Дакле, сви $s_1, \dots, s_r$ су исте боје. Сматраћемо да су $s_1, \dots, s_r$ плави, тако да је $\text{нзд}(P \cup \{n\}) = t$.

(1°) Претпоставимо да је $t>1$. Нека је x такво да $t \nmid x$ и нека је $s \in S$. Због $t \nmid x+s$ важи $x+s \notin S$, па по услову задатка x и $x+s$ морају бити исте боје. Индукцијом следи да је $x+kt = x+k(s_1+\dots+s_r)$ исте боје као x за свако $k \in \mathbb{N}_0$. Према томе, x и y су исте боје кад год $t \mid y-x$ и $t \nmid x$, па можемо узети $d=t$.

(2°) Остаје случај $t=1$. Докажимо да у овом случају сви црвени бројеви леже у S. Претпоставимо да постоји црвен број z који није у S. За сваки од њих, $z-s_i$ је црвен (у супротном би из $s_i \in S$ следило $z \in S$) и није у S (у супротном би из ($\bullet$) следило $(z-s_i)+s_i = z \in S$, јер је $z-s_i$ црвен и s_i плав). Индукцијом следи да је за свако k број $z-k(s_1+\cdots+s_r)=z-k$ црвен и није у S, што је немогуће.

Сада означимо $d=\text{нзд}(C\cup\{n\})$. Ако је $d=1$, аналогно би следило да и сви плави бројеви леже у S, тј. $S=\{0,1,\dots,n-1\}$, што није тачно. Дакле, $d>1$. Најзад, ако су црвен број x и плав y такви да $d\mid x-y$, по претходном је $x\in S$, те је $d\mid x$, чиме је тврђење доказано.

4. Претпоставимо да отац подели коње по следећој табели:

	син 1	*син 2*	*син 3*
коњи расе 1	x_1+y_1	x_1	x_1
коњи расе 2	x_2	x_2+y_2	x_2
коњи расе 3	x_3	x_3	x_3+y_3

где су x_i и y_i ненегативни цели бројеви такви да је $3x_i+y_i=b_i$ за $i=1,2,3$. По процени i-тог сина, вредност његових коња је за $y_ia_{ii}-y_ja_{ij}$ већа од вредности коња j-тог сина ($i\neq j$). Према томе, довољно је одабрати бројеве y_1,y_2,y_3 тако да важи

$$y_i\equiv b_i \pmod 3 \quad \text{и} \quad \frac{y_j}{y_i}<\frac{a_{ii}}{a_{ij}} \quad \text{за све } i,j\in\{1,2,3\}.$$

По услову задатка постоји $\varepsilon>0$ такво да је $\frac{a_{ii}}{a_{ij}}\geqslant 1+\varepsilon$ кад год је $i\neq j$. Ако су $b_1,b_2,b_3\geqslant n$, одабраћемо y_i ($i=1,2,3$) тако да је $n-2\leqslant y_i\leqslant n$ и $y_i\equiv b_i$ (mod 3). Како је тада $\frac{y_j}{y_i}\leqslant 1+\frac{2}{n-2}$, довољно је да важи $n>2+\frac{2}{\varepsilon}$.

5. За $x\leqslant 7$ једина решења (x,y) су $(2,0)$, $(3,1)$ и $(7,3)$.

Претпоставимо да је $x\geqslant 8$. Тада је $5^y\equiv -3 \pmod{2^8}$. Како је $5^3\equiv 2^7-3 \pmod{2^8}$, а пореци броја 5 по модулима 2^7 и 2^8 редом су 32 и 64, мора бити $y\equiv 3 \pmod{32}$, али не и $y\equiv 3\pmod{64}$. Дакле, $y\equiv 35 \pmod{64}$.

Сада ће неки модул облика $64k+1$ бити од користи, па има смисла свођење по модулу 257. С једне стране, 2^y по модулу 257 даје само остатке $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16,\pm32,\pm64,\pm128$. С друге стране је $5^{35}=(5^7)^5\equiv(-3)^5\equiv 14 \pmod{257}$, док из $(5^{64k})^4\equiv 1 \pmod{257}$ следи да је $5^{64k}\in\{\pm1,\pm16\}$, тако да имамо $5^x\in\{\pm14,\pm-33\}$ и $5^x+3\in\{-30,-11,17,36\}\not\ni 2^y$ по модулу 257. Према томе, за $x\geqslant 8$ нема решења.

<u>*Друго решење.*</u> Као и у првом решењу, ако је $y\geqslant 8$, свођење по модулу 2^8 даје $y\equiv 35 \pmod{64}$. Сада ћемо посматрати једначину по (простом) модулу 641. Овај модул је згодан јер $641=5^4+2^4\mid 2^{32}+1$. Пошто је $5^4\equiv -2^4 \pmod{641}$, следи $5^{32}\equiv 2^{32}\equiv -1$, $5^{64}\equiv 1$ и $5^y\equiv 5^{35}\equiv -5^3=-125$, те је $2^x=5^y+3\equiv -122 \pmod{641}$.

С друге стране, из $2^x\equiv 3 \pmod 5$ имамо $x\equiv 3 \pmod 4$, па је $2^x\in\{\pm8,\pm128,$ $\pm125,\pm77,\mp50,\mp159,\pm20,\pm320\}$, тако да нема решења.

6. Претпоставимо да Милисав има ненадвладиву фигурицу и означимо са a_i број појављивања броја i на њој. Разматрамо два типа измене на фигурици:

(A) Замена једног пара бројева (x, y) паром $(x+1, y-1)$, где је $y \geqslant 2$.

Овом изменом, број могућих победничких исхода у сучељавању са полазном фигурицом порашће за $P_+ = a_x - a_{y-1}$, док ће број могућих губитничких исхода порасти за $P_- = a_y - a_{x+1}$. Како добијена фигурица не надвладава полазну, важи $P_- \geqslant P_+$. Према томе, кад год су x и y бројеви на две стране фигурице, важи:

$$a_x + a_{x+1} \leqslant a_y + a_{y-1}. \qquad (*)$$

(B) Замена тројке бројева (x, y, z) тројком $(x+1, y+1, z-2)$, где је $z \geqslant 3$.

Слично као у (A) закључујемо да, ако су x, y и z бројеви на три стране фигурице, важи

$$(a_x + a_{x+1}) + (a_y + a_{y+1}) \leqslant a_z + 2a_{z-1} + a_{z-2}. \qquad (**)$$

Испитаћемо како изгледа низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Можемо га сматрати коначним, јер су сви његови чланови почев од неког нуле.

Претпоставимо прво да се никоја два броја на фигурици не разликују за тачно 1. Нека су $x > 1$ и $y > 1$ два броја на фигурици. По претпоставци је $a_{x\pm1} = a_{y\pm1} = 0$, па из $(*)$ следи $a_y \geqslant a_x$ и $a_x \geqslant a_y$, тј. $a_x = a_y = q$ (за неко q). Слично, ако је $x = 1$, следи $a_1 \leqslant q$. Ако су сада $x > 1$, $y > 1$ и $z > 2$ на фигурици, знамо да је $a_{z-2} \leqslant q$, али $(**)$ за (x, y, z) даје $a_z + a_{z-2} \geqslant 2q$. Следи да је $a_{z-2} = q$ (ово ће важити и за $z = 3$ ако овај број постоји). Према томе, низ (a_i) има облик $(\dots, q, 0, q, 0, q, 0, q)$.

Надаље сматрамо да се, за неко n, на фигурици појављују бројеви $n-1$ и n, при чему је $a_{n-1} = p$ и $a_n = q$.

Лема. (а) Ако на фигурици нема броја $n+1$, онда нема бројева већих од n;

(б) На фигурици се појављују сви бројеви од 1 до n.

Доказ. (а) Претпоставимо да се појављује број $m \geqslant n+2$, али не и $n+1, \dots, m-1$. Из $(*)$ за $(x, y) = (n-1, m)$ и $(x, y) = (m, n)$ добијамо $a_m = p + q$ (па се m појављује бар двапут) и $a_{m+1} = 0$. Међутим, релација $(**)$ за $(x, y, z) = (n-1, m, m)$ даје $p + 2q \geqslant 2p + 2q$, што је немогуће.

(б) Претпоставимо да нема броја $n-2$. Ако је $p \geqslant 2$, онда $(**)$ за тројку $(x, y, z) = (n-1, n-1, n)$ даје контрадикцију. Дакле, мора бити $p = 1$, а онда из $(*)$ за $(x, y) = (n, n-1)$ следи $q = 1$ и $a_{n+1} = 0$. Сада, за ма који број $m \notin \{n-1, n\}$ на фигурици, из $(*)$ за $(x, y) = (m, n-1)$ следи да је $a_m = 1$ и $a_{m+1} = 0$. Из истог разлога је $a_{m-1} = 0$ ако је $m > 1$ (такво m постоји, јер има више од три стране), али тада $(*)$ за $(x, y) = (n-1, m)$ даје коначну контрадикцију. $\square$

Сада $(*)$ важи и за $(x, y) = (n-2, n)$, дајући $a_{n-2} \leqslant p$. Под претпоставком да је $n \geqslant 4$, из $(*)$ за $(x, y) = (n-1, n-2)$ следи да је $a_{n-3} \geqslant q$. Одатле из $(*)$ за $(x, y) = (n-3, n-1)$ и $(x, y) = (n-1, n-2)$ добијамо $q + a_{n-2} \geqslant a_{n-3} + a_{n-2} \geqslant p + q$, па мора бити $a_{n-3} = q$ и $a_{n-2} = p$. Такође, ако је $n = 3$ и $q \geqslant 2$, заменом $(x, y) = (2, 2)$ и $(x, y) = (1, 3)$ у опет закључујемо $a_1 = p$. Индукцијом следи да у оба случаја низ (a_i) има облик $(\dots, p, q, p, q, p, q)$.

У преосталом случају, за $n = 3$ и $q = 1$, из $(*)$ за $(x, y) = (3, 2)$ следи $p - 1 \leqslant a_1 \leqslant p$. Тако за низ (a_i) у обзир долази и облик $(p - 1, 1, p)$.

Међутим, у нашем случају низ (a_i) не може да има облик $(p-1, 1, p)$, јер би иначе било $26^{5^{2019}} = 2p$ и $27^{5^{2019}} = (p-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 + p\cdot 3 = 4p+1$.

Слично, низ облика $(\dots, p, q, p, q, p, q)$ са $p \geqslant 0$ није могућ. Заиста, ако је највећи број на фигурици једнак $2n-1$, имали бисмо $26^{5^{2019}} = (n-1)p + nq$ и $27^{5^{2019}} = p(2+4+\dots+(2n-2)) + q(1+2+\dots+(2n-1)) = n[(n-1)p+nq] = n\cdot 26^{5^{2019}}$, што је немогуће, а ако је највећи број $2n$, имали бисмо $26^{5^{2019}} = np + nq$ и $27^{5^{2019}} = p(2+4+\dots+2n) + q(1+2+\dots+(2n-1)) = n[(n+1)p+nq] = n\cdot 26^{5^{2019}}$, тј. $26^{5^{2019}}$ и $27^{5^{2019}}$ су дељиви са n, што је опет немогуће.