Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

26. мај 2019.

Први дан

1. a) Дато је 2019 различитих целих бројева који немају непарне просте делиоце мање од 37. Доказати да постоје два од датих бројева чији збир нема непаран прост делилац мањи од 37.

b) Да ли тврђење остаје тачно ако се 37 (на оба места) замени са 38?

2. Дат је $\triangle ABC$, $AC \neq BC$, и тачка D унутар њега таква да је испуњено $\measuredangle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle ACB$. Тангенте у тачки C на кружнице описане око $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ секу праве AB и AD, редом, у тачкама P и Q. Доказати да права PQ полови $\measuredangle BPC$.

3. Дат је природан број n и кружница обима n. На кружници су, у смеру казаљке на сату, записани бројеви $0, 1, \ldots, n-1$, у овом редоследу и на једнаком одстојању. Сваки број је обојен црвеном или плавом бојом, и постоји бар један ненула број од сваке боје. Познато је да постоји скуп $S \subsetneq \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $|S| \geqslant 2$, за који важи: ако је (x, y) кружни лук чији су крајеви различите боје и чија дужина је у S (где лук посматрамо од x до y у смеру казаљке на сату), тада $y \in S$. Доказати да постоји делилац d броја n, различит од 1 и n, за који важи: ако је (x, y) кружни лук чији су крајеви различите боје и чија је дужина дељива са d, тада су и x и y дељиви са d.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

27. мај 2019.

Други дан

4. Богати трговац има три расе коња у својим шталама, и то тачно b_j коња расе j (за $j = 1, 2, 3$). Он жели да подели наследство својим трима синовима. Зна се да би син i за коња расе j $(i, j = 1, 2, 3)$ платио тачно a_{ij} златника, при чему за свака два различита i и j важи $a_{ii} > a_{ij}$ и $a_{jj} > a_{ij}$. Доказати да постоји природан број n такав да, кад год важи $\min\{b_1, b_2, b_3\} > n$, трговац може расподелити своје коње својим синовима на такав начин да сваки син, вреднујући и своје и туђе коње по сопственим критеријумима, сматра да управо његови коњи највише вреде.

5. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$2^x = 5^y + 3.$$

6. Назовимо *фигурицом* полиедар са $26^{5^{2019}}$ страна. На свакој страни фигурице је уписан по један број. Приликом бацања две фигурице у ваздух (са не нужно истим скупом уписаних бројева) побеђује она која падне на страну на којој је већи број; уколико се добију исти бројеви, бацање се понавља све док се не добију различити бројеви. Кажемо да једна фигурица *надвладава* другу уколико има већу вероватноћу победе приликом бацања (могуће је и да ниједна од две фигурице не надвладава другу). Сматрати да свака фигурица има исту вероватноћу падања на сваку своју страну.

Милисав и Милојка имају по једну фигурицу без уписаних бројева. Прво Милисав уписује $26^{5^{2019}}$ (не нужно различитих) природних бројева на своју фигурицу (на сваку страну по један), при чему збир уписаних бројева износи $27^{5^{2019}}$. Видевши његову фигурицу, Милојка потом на своју фигурицу уписује (могуће неке друге) природне бројеве чији је збир такође $27^{5^{2019}}$. Може ли она то увек учинити на такав начин да добије фигурицу која надвладава Милисављеву?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.