utorak, 9.4.2019.

Zadatak 1. Naći sve trojke (a, b, c) realnih brojeva takve da važi $ab + bc + ca = 1$ i

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Zadatak 2. Neka je n prirodan broj. Domine su postavljene na $2n \times 2n$ tablu tako da je svako polje table susedno tačno jednom polju pokrivenom dominom. Za svako n, odrediti najveći broj domina koje mogu biti postavljene na ovaj način.

(*Domina* je pločica veličine 2×1 ili 1×2. Domine su postavljene na tablu tako da svaka domina pokriva tačno dva polja table, i domine se ne preklapaju. Za dva polja kažemo da su *susedna* ako su različita i imaju jednu zajedničku ivicu.)

Zadatak 3. Neka je ABC trougao za koji važi $\angle CAB > \angle ABC$, i neka je I centar njegove upisane kružnice. Neka je D tačka na duži BC takva da $\angle CAD = \angle ABC$. Neka je ω kružnica koja je tangentna na pravu AC u tački A i sadrži tačku I. Neka je X druga tačka preseka kružnice ω i kružnice opisane oko trougla ABC. Dokazati da se simetrale uglova $\angle DAB$ i $\angle CXB$ seku u tački na pravoj BC.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.

sreda, 10.4.2019.

Zadatak 4. Neka je ABC trougao, i neka je I centar njegove upisane kružnice. Kružnica kroz tačku B koja je tangentna na pravu AI u tački I ponovo seče stranicu AB u tački P. Kružnica kroz tačku C koja je tangentna na pravu AI u tački I ponovo seče stranicu AC u tački Q. Dokazati da je prava PQ tangenta kružnice upisane u trougao ABC.

Zadatak 5. Dat je prirodan broj $n \geq 2$, kao i prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokazati da postoje prirodni brojevi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ koji zadovoljavaju sledeća tri uslova:

(A) $a_i \leq b_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$,

(B) ostaci pri deljenju brojeva $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sa n su svi različiti, i

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo ceo deo realnog broja x, odnosno najveći ceo broj koji nije veći od x.)

Zadatak 6. Alina na kružnici crta 2019 tetiva čije su krajnje tačke sve različite. Tačka je *značajna* ako

(i) je jedna od 4038 krajnjih tačaka tetiva, ili

(ii) je presečna tačka dve ili više tetiva.

Alina zatim označava brojem svaku značajnu tačku. Od 4038 tačaka koje zadovoljavaju uslov (i), Alina označava 2019 tačaka brojem 0, a preostalih 2019 tačaka brojem 1. Svaku tačku koja zadovoljava uslov (ii) ona označava proizvoljnim celim brojem (koji ne mora biti pozitivan).

Potom, Alina posmatra duži koje povezuju susedne značajne tačke duž svake tetive. (Tetiva sa k značajnih tačaka ima tačno $k-1$ takvih duži.) Na svakoj takvoj duži ona piše žutom bojom zbir brojeva kojima su označene krajnje tačke te duži, a plavom bojom apsolutnu vrednost razlike tih brojeva.

Konačno, Alina primećuje da ima ukupno $N+1$ brojeva napisanih žutom bojom, i da se među njima svaka od vrednosti $0, 1, \ldots, N$ pojavljuje tačno jednom. Dokazati da je bar jedan broj napisan plavom bojom umnožak broja 3.

(*Tetiva* je duž koja spaja dve različite tačke na kružnici.)

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.