ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ
ЗА ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 17. новембар 2018.

1. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве x и y важи

$$(x+1)f(xf(y)) = xf(y(x+1)).$$

2. На страницама BC, CA и AB троугла ABC дате су редом тачке P, Q и R тако да је четвороугао $AQPR$ тетиван и $BR = CQ$. Тангенте на описани круг троугла ABC у тачкама B и C секу праве PR и PQ у тачкама X и Y, редом. Доказати да је $PX = PY$.

3. Колико највише поља шаховске табле 8×8 је могуће исећи дуж обе дијагонале тако да се табла не распадне?

4. Низ (a_n) је задат условима $a_1 = 7$ и

$$a_n = a_{n-1} + \text{нзд}(n, a_{n-1})$$

за $n \geqslant 2$. Доказати да је за свако $n \geqslant 2$ разлика $a_n - a_{n-1}$ или прост број, или јединица.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕГМО 2019

Београд, 2. децембар 2018.

1. За низ реалних бројева $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ важи

$$a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n| \quad \text{за све } n \geqslant 1.$$

Доказати да је овај низ периодичан.

2. Сваки од n ученика има неки (позитиван) број кликера, а сви ученици заједно имају укупно $2n-2$ кликера. Доказати да за сваки природан број $\ell \leqslant 2n-2$ постоји подскуп скупа ученика који укупно има тачно ℓ кликера.

3. Дат је паралелограм $ABCD$. Произвољна права p кроз теме A сече полуправе BC и DC редом у тачкама X и Y. Нека је K центар приписаног круга троугла ABX наспрам темена A, а L центар приписаног круга троугла ADY наспрам темена A. Доказати да угао KCL не зависи од избора праве p.

Време за рад: 180 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

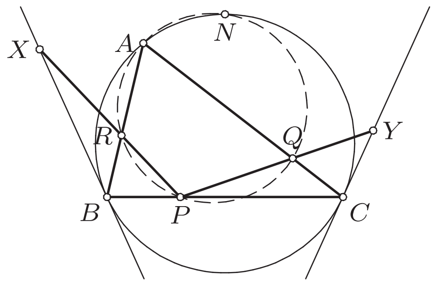
РЕШЕЊА

1.1. Заменом $x = 0$ у дату функционалну једначину $(*)$ добијамо $f(0) = 0$. Ако за неко $a \neq 0$ важи $f(a) = 0$, онда за $y = a$ и свако $x \neq 0$ једначина $(*)$ даје $f(a(x+1)) = 0$, па је $f \equiv 0$. Зато надаље сматрамо да је $f(x) \neq 0$ за $x \neq 0$.

Претпоставимо да за неко $y \neq 0$ важи $f(y) \neq y$. Одаберимо x тако да је $xf(y) = y(x+1)$ - дакле, $x = \frac{y}{f(y)-y}$. Тада из $(*)$ следи $0 = (x+1)f(xf(y)) - xf(y(x+1)) = f(y(x+1))$, одакле је $x = -1$. Из $xf(y) = y(x+1)$ следи $f(y) = 0$, тј. $y = 0$, противно претпоставци.

Према томе, једина решења су функције $f(x) = 0$ и $f(x) = x$.

1.2. Како је $\sphericalangle BPR < 180° - \sphericalangle QPR = \sphericalangle BAC$, тачка X је на полуправој PR. Слично, тачка Y је на полуправој PQ. При томе је $\sphericalangle RBX = \sphericalangle ACB = \sphericalangle QCP$ и $\sphericalangle BRX = \sphericalangle PRA = \sphericalangle PQC$, што заједно са $BR = CQ$ даје $\triangle BRX \cong \triangle CQP$. Следи да је $BX = CP$. Слично је $CY = BP$, па су троуглови XBP и PCY подударни и одатле $PX = PY$.

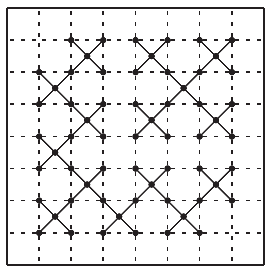


<u>*Напомена.*</u> Средиште N лука BAC описаног круга лежи на кругу AQR и важи $NQ = NR$, а тачке X и Y су симетричне у односу на праву NP.

1.3. Претпоставимо да је пресечено k квадрата. Пререзане дијагонале чине граф G чија темена одговарају теменима и центрима k исечених квадрата. Овај граф има $4k$ грана. Да се табла не би распала, у графу не смеју да се појаве циклуси, па је његов број темена бар $4k + 1$.

Како ниједан од ивичних квадрата не сме бити исечен, сва темена графа G припадају унутрашњем квадрату 6×6. Штавише, како граф има паран број темена на свакој ивици унутрашњег квадрата 6×6, бар два подеона темена овог квадрата (од укупно 49) нису темена графа. Дакле, граф G има највише $47+k$ темена, па је $47+k \geqslant 4k+1$, тј. $k \leqslant 15$.

Слика показује да се број 15 може достићи.



1.4. Видимо да је $a_2 = 8$ и $a_3 = 9$.

Претпоставимо да је $a_n = 3n$ за неко $n \geqslant 3$ и посматрајмо најмањи природан број $m > n$ такав да је $a_m - a_{m-1} > 1$. Доказаћемо да је $a_m - a_{m-1}$ прост број и $a_m = 3m$. Тврђење задатка ће одмах следити индукцијом.

За $0 < i \leqslant m-n$ важи $a_{n+i-1} = 3n+i-1$ и

$$\begin{aligned} a_{n+i} - a_{n+i-1} &= (n+i, a_{n+i-1}) = (n+i, 2n-1) = (2n+2i, 2n-1) \\ &= (2i+1, 2n-1). \end{aligned}$$

Дакле, $2i+1$ је узајамно просто са $2n-1$ за $0 < i < m-n$, али не и за $i = m-n$. Следи да је $p = 2(m-n)+1$ најмањи прост делилац броја $2n-1$ и $m = n + \frac{p-1}{2}$. Сада је $a_m - a_{m-1} = p$ и $a_m = a_{m-1} + p = 3n + \frac{p-3}{2} + p = 3m$.

2.1. Бар један члан низа је ненегативан. Ако је $a_i \geqslant 0$ за $i \geqslant 1$, међу члановима a_{i-1} и a_{i+1} бар један је ненегативан, рецимо $a_{i+1} \geqslant 0$. Ако је $a_{i+1} \geqslant a_i$, онда је $a_{i+2} = a_{i+1} - a_i \leqslant a_{i+1}$. Дакле, за неко n важи $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$.

Означимо $a_n = x + y$ и $a_{n+1} = x$, где су $x, y \geqslant 0$. Тада је $a_{n+2} = -y$ и $a_{n+3} = y - x$, а надаље разликујемо два случаја.

(i) $x \geqslant y$. Наредни чланови низа су x, $2x-y$, $x-y$, $-x$, y, $x+y$, x.

(ii) $x < y$. Наредни чланови низа су $2y-x$, y, $x-y$, $-x$, y, $x+y$, x.

У оба случаја низ је периодичан са периодом 9 почев од a_n, па једноставном индукцијом следи да је периодичан и почев од a_0.

2.2. Нека има k ученика са по једним кликером. Осталих $n-k$ ученика имају редом $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$ кликера, при чему је $a_i \leqslant k$ за свако i: у супротном би било више од $k \cdot 1 + k + (n-k-1) \cdot 2 = 2n-2$ кликера.

Означимо $s_0 = 0$ и $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ за $i = 1, 2, \ldots, n-k$. За неко $i \in \{0, \ldots, n-k\}$ важи $s_i \leqslant \ell \leqslant s_{i+1} \leqslant s_i + k$. Дакле, постоји неколико ученика са по бар два кликера који укупно имају s_i кликера, а додавањем још $\ell - s_i$ оних са по једним кликером добијамо тражени подскуп.

Напомена. Тврђење важи кад год укупан број кликера не прелази $2n-1$.

2.3. Означимо $\sphericalangle BAK = \sphericalangle KAX = x$ и $\sphericalangle XAL = \sphericalangle LAD = y$. Како је $\sphericalangle KBC = \sphericalangle CDL = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = x + y$, имамо $\sphericalangle AKB = x + y - \sphericalangle BAK = y$ и аналогно $\sphericalangle DLA = x$. Према томе, $\triangle ABK \sim \triangle LDA$. Из ове сличности имамо $\frac{KB}{AD} = \frac{BA}{DL}$, тј. $\frac{KB}{BC} = \frac{CD}{DL}$, што заједно са условом $\sphericalangle KBC = \sphericalangle CDL$ даје $\triangle KBC \sim \triangle CDL$. Одавде је $\sphericalangle LCD + \sphericalangle BCK = \sphericalangle CKB + \sphericalangle BCK = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAD$, па је $\sphericalangle KCL = 360^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAD) - \sphericalangle DCB = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAD$.