**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**16. март 2019.**

**Први разред – А категорија**

**1.** Дат је полином

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

са целобројним коефицијентима. Ако полином $P$ има две различите целобројне нуле које нису позитивне (и можда још нула осим ове две) и притом важи $P(1) = 2$, доказати:

a) $a_0 = 0$;

b) $\sum_{2|i} a_i = \sum_{2\nmid i} a_i$.

**2.** У $\triangle ABC$ тачке $O$ и $I$ представљају центар описане и уписане кружнице, редом. Нека је $O_1$ централносиметрична слика тачке $O$ у односу на тачку $I$, и нека је $I_1$ централносиметрична слика тачке $I$ у односу на тачку $O$. Ако $O_1$ лежи на висини из темена $A$ а $I_1$ лежи на висини из темена $B$, доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

**3.** Доказати да постоји бесконачно много парова различитих природних бројева $(m, n)$ таквих да је збир свих позитивних делилаца броја $m^2$ једнак збиру свих позитивних делилаца броја $n^2$.

**4.** Свака тачка простора је обојена једном од три боје. Доказати да се може одабрати једна од те три боје таква да, за сваки позитиван реалан број $r$, постоји троугао површине $r$ чија су сва три темена обојена изабраном бојом.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**16. март 2019.**

## Други разред – А категорија

**1.** Дат је полином
$$P(x) = x^{2019} + 2018x^{2017} + 2016x + 2015.$$
Наћи све целе бројеве $n$ такве да
$$P(n) \mid P(P(n) + 1).$$

**2.** Дат је $n$-елементан скуп $X$. Нека су $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ различити подскупови скупа $X$ такви да за све $i, j$, $i \neq j$, важи $|Y_i \cap Y_j| \leqslant 2$. Одредити максималну могућу вредност броја $k$.

**3.** Дат је тетивни четвороугао $ABCD$ такав да $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ нису једнакостранични. Нека је $E$ средиште дијагонале $AC$. Нека се нормала из $D$ на Ојлерову праву за $\triangle ABC$ и нормала из $B$ на Ојлерову праву за $\triangle ADC$ секу у тачки $F$. Нека је $G$ тачка на дужи $EF$ таква да важи $GF = 2GE$. Доказати: $GB = GD$.

**4.** Нека је $p$ прост број облика $4t + 1$. Нека су $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)$ сви уређени парови природних бројева $(a, b)$ за које важи $a < b \leqslant \dfrac{p-1}{2}$ и $p \mid a^2 + b^2$. Доказати:
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_k = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k).$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**16. март 2019.**

### Трећи разред – А категорија

**1.** Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан је са $x_1 = 16$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2019$ и, за $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+3} = \begin{cases} x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}x_{n+2}}, & \text{за } x_{n+1}, x_{n+2} \neq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказати да постоји природан број $n$ за који важи $x_n = 0$, и одредити најмање такво $n$.

**2.** Наћи све бар четвороцифрене природне бројеве $m$ за које постоји $b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ са следећом особином: уколико $b$ упишемо између било које две цифре броја $m$, или допишемо на почетак или крај броја $m$, тако добијен број је увек потпун квадрат.

**3.** На страницама $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ паралелограма $ABCD$ дате су, редом, тачке $P, Q, R, S$, различите од темена, такве да је $PQRS$ правоугаоник и $PQ > PS$. Доказати: $\dfrac{PR}{PS} > \dfrac{AB}{AD}$.

**4.** Дат је квадрат $ABCD$. Разрежемо квадрат $ABCD$ на четири подударна квадрата (по дужима које настају спајањем средишта наспрамних ивица). Потом одаберимо један од тако насталих квадрата и разрежемо га на четири подударна квадрата. Потом одаберимо један од (укупно седам) тако насталих квадрата и разрежемо га на четири подударна квадрата. Назовимо *квад-поделом* колекцију квадрата која се добија понављањем овог поступка коначан број пута. Два квадрата у квад-подели су *суседна* ако страница једног од њих садржи страницу другог (могуће је и да се странице поклапају). Кажемо да је квад-подела *балансирана* ако је количник страница свака два суседна квадрата једнак 1, 2 или $\dfrac{1}{2}$. Одредити најмањи природан број $k$ такав да квадрате сваке балансиране квад-поделе можемо обојити са $k$ боја а да притом два суседна квадрата увек буду обојени различитим бојама.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**16. март 2019.**

## Четврти разред – А категорија

**1.** Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека су $AA_0$, $BB_0$ и $CC_0$ његове висине, $A_1$, $B_1$ и $C_1$ средишта страница $BC$, $AC$ и $AB$, респективно, а $O$ центар описане кружнице. Доказати да је обим $\triangle A_0B_0C_0$ мањи од $2(OA_1 + OB_1 + OC_1)$.

**2.** Дат је природан број $n$. Одредити колико постоји коначних низова $(a_1, a_2, \dots, a_t)$ (где $t \in \mathbb{N}$ није унапред фиксирано) који испуњавају следећа три услова:

- $a_1, a_2, \dots, a_t \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- за све $j$, $1 \leqslant j \leqslant t-1$, важи $a_j \leqslant a_{j+1} + 1$;
- не постоје $j$ и $k$, $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant t-1$, за које важи $a_k \leqslant a_j = a_{k+1}$.

**3.** За природан број $n$ означимо са $x_n$ број који се добије узастопним записивањем свих природних бројева од 1 до $n$ један иза другог (нпр. $x_{14} = 1234567891011121314$). Означимо са $f(n)$ остатак при дељењу броја $x_n$ са 11. Да ли постоје природни бројеви $t$ и $n_0$ такви да за све $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, важи $f(n+t) = f(n)$?

**4.** Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да за све позитивне реалне бројеве $x$ и $y$ важи

$$f(x) + f(y) = \big(f(f(x)) + f(f(y))\big) f(xy),$$

и да притом само коначно много слика из кодомена има више (тј. бар 2) оригинала.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**16. март 2019.**

**Први разред – Б категорија**

**1.** Дата су следећа три исказа о природном броју $n$:

- ако је $n$ дељив са 3, онда је паран;
- $n$ је дељив са 5 и непаран је;
- $n$ није дељив са 3 или $n$ није дељив са 5.

Одредити које све остатке при дељењу са 30 могу имати они природни бројеви $n$ за које су тачна два од наведена три исказа, а један нетачан.

**2.** Дат је $\triangle ABC$. На страницама $AC$ и $BC$ су одабране тачке $M$ и $N$, редом, такве да важи $AM = BN$. Кружнице описане око $\triangle ANC$ и $\triangle BMC$ секу се још у тачки $P$ (поред тачке $C$). Доказати да је права $CP$ симетрала угла код темена $C$.

**3.** За природан број $n$ кажемо да је *згодан* ако цифре које учествују у његовом запису можемо разбити на две групе такве да су збирови цифара у тим групама међусобно једнаки (нпр. број 121 јесте згодан јер у једну групу можемо ставити две јединице а у другу цифру 2, и тада важи $1 + 1 = 2$; број 2019 није згодан јер ће, при ма каквом разбијању, група у којој је цифра 9 имати већи збир него друга група).

a) Одредити најмањи природан број $n$ такав да су оба броја $n$ и $n+1$ згодни.

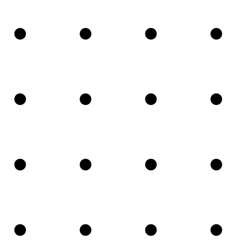
b) Да ли постоје три узастопна природна броја који су сви згодни?

**4.** Дата је функција

$$f(x) = \frac{ax + 2}{3x - \frac{1}{a}}.$$

Одредити све могуће вредности реалног параметра $a$ такве да за све реалне вредности $x$ за које је $f(x)$ дефинисано важи да је и $f(f(x))$ дефинисано и $f(f(x)) = x$.

**5.** Дата је квадратна решетка $4\times 4$ сачињена од 16 тачака (видети слику). Колико има правоугаоника са теменима у овим тачкама? (Квадрате такође сматрамо специјалним случајевима правоугаоника.)



Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**16. март 2019.**

## Други разред – Б категорија

**1.** Који број је већи,
$$\log_3 2019 \quad \text{или} \quad 4+\sqrt{\log_3 18171} \quad ?$$

**2.** Ана на пијаци продаје пите.

- Првог сата је продала четвртину броја свих изнетих пита и још једну четвртину пите.
- Другог сата је продала петину броја преосталих пита и још једну петину пите.
- Трећег сата је продала четвртину броја преосталих пита и још једну четвртину пите.
- Четвртог сата је продала четвртину броја преосталих пита и још једну четвртину пите.
- Петог сата је продала петину броја преосталих пита и још једну петину пите.

Ако се зна да је Ана са собом понела цео број пита, као и да је у току сваког сата Ана продала цео број пита, одредити који је најмањи могућ број пита који је Ана могла понети на пијацу.

**3.** Решити неједначину:
$$x^2+4x\sqrt{x+6} \leqslant 5(x+6).$$

**4.** У унутрашњости $\triangle ABC$ у ком важи $\measuredangle BAC = 60^\circ$ и $\measuredangle ABC = 20^\circ$ уочена је тачка $Q$ за коју је испуњено $\measuredangle QAB = 20^\circ$ и $\measuredangle QCB = 30^\circ$. Доказати да тачка $Q$ припада симетрали $\measuredangle ABC$.

**5.** У месту Средње Зуце сваки телефонски број има пет цифара које су поређане у нерастућем или неопадајућем поретку, и притом прва цифра није 0. Колико максимално телефонских бројева може постојати у том месту?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**16. март 2019.**

**Трећи разред – Б категорија**

**1.** Наћи збир свих троцифрених бројева који у свом декадном запису садрже само непарне цифре.

**2.** Решити једначину

$$(n^4 - 9n^2 + 19)^{n^3+14n^2+33n} = 1$$

у скупу целих бројева.

**3.** У зависности од реалног параметра $k$, одредити колико решења $(x, y, z)$ у скупу реалних бројева има једначина

$$\sqrt{x^2 - 6xz + 6x + 9z^2 - 18z + 9} + |2x + ky - z + 2| + (x + 2y + kz - 1)^{20190316} = 0.$$

**4.** У Декартовом координатном систему су дате тачке $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(2,0)$ и $C(4,0)$. Наћи све могуће координате тачке $M$ такве да важи

$$\measuredangle OMA = \measuredangle CMB \quad \text{и} \quad \measuredangle MAO = \measuredangle MBC.$$

**5.** Доказати да је за сваки природан број $n$, $n \geqslant 3$, цифра десетица броја $3^n$ парна.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**16. март 2019.**

**Четврти разред – Б категорија**

**1.** Колико има комплексних бројева $z$ за које важи

$$z^{2019} = (z+1)^{2019} = 1 \quad ?$$

**2.** Да ли број облика

$$200\ldots0019,$$

где нула има произвољно много али бар две, може бити дељив са 2019?

**3.** У једном граду живе истинољупци (који увек говоре истину), лажови (који увек лажу) и нормалци (који некада лажу а некада говоре истину). У судници су се затекли тужилац, бранилац и оптужени, при чему је познато да је међу њима један истинољубац, један лажов и један нормалац (али није познато ко је ко). Притом суд има доказе да је злочин починио или оптужени, или тужилац, или бранилац, и такође је познато да особа која је починила злочин није лажов. Њих тројица су изјавили следеће:

- Оптужени: „Ја сам невин.“
- Бранилац: „Оптужени је невин.“
- Тужилац: „Оптужени је крив.“

Како суд није успео да донесе пресуду, позван је инспектор из другог града. Он је одлучио да ће разрешити не само ко је крив, него и ко је (од три актера) истинољубац, ко лажов, а ко нормалац. Најпре је питао следеће: „Тужиоче, јесте ли криви за овај злочин?“ Тужилац је одговорио, након чега инспектор и даље није имао све жељене информације, па је поставио друго питање: „Браниоче, да ли је тужилац крив за овај злочин?“ Бранилац је одговорио, и то је инспектору било довољно да сазна све што га је занимало. Одредити ко је крив за почињени злочин, као и ко је истинољубац, ко лажов а ко нормалац.

**4.** Дат је низ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ дефинисан са

$$a_n = \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n}.$$

Одредити

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

**5.** Да ли постоји четвороугао који има следећу особину: уколико обришемо ма које његово теме, уместо обрисаног темена увек можемо одабрати неку другу тачку у равни и на тај начин добити четвороугао подударан полазном?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.