36. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кишињев, Молдавија – 2. мај 2019.

1. Означимо са $\mathbb{P}$ скуп свих простих бројева. Наћи све функције $f:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ такве да важи
$$f(p)^{f(q)}+q^p=f(q)^{f(p)}+p^q$$
за све $p,q\in\mathbb{P}$. *(Албанија)*

2. Реални бројеви a, b и c су такви да важи $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c$ и $a+b+c=ab+bc+ca>0$. Доказати неједнакост
$$(a+1)\sqrt{bc}\geqslant 2.$$
Одредити све тројке (a,b,c) за које се достиже једнакост. *(Румунија)*

3. Дат је оштроугли разностраничан троугао ABC. Нека су X и Y различите тачке унутар дужи BC такве да је $\sphericalangle CAX=\sphericalangle YAB$. Означимо са:

(1°) K и S - редом подножја нормала из темена B на праве AX и AY;

(2°) T и L - редом подножја нормала из темена C на праве AX и AY.

Доказати да се праве KL и ST секу на правој BC. *(Грчка)*

4. *Решетка* је скуп свих тачака облика (m,n), где су m и n цели бројеви за које је $|m|\leqslant 2019$, $|n|\leqslant 2019$ и $|m|+|n|<4038$. Тачке (m,n) на решетки са $|m|=2019$ или $|n|=2019$ зовемо *ивичним*. Четири праве $x=\pm 2019$ и $y=\pm 2019$ зовемо *ивицама*. Две тачке на решетки су *суседне* ако је растојање између њих 1.

Зека и Меда играју игру на решетки. Они играју наизменично, при чему Зека почиње игру постављањем жетона на тачку $(0,0)$, а Меда повлачи први потез.

(1°) У сваком свом потезу Меда уклања највише по две ивичне тачке са сваке од ивица.

(2°) У сваком свом потезу Зека прави тачно три *корака*. Корак се састоји од померања жетона на једну од суседних тачака које нису уклоњене.

Игра се завршава Зекином победом чим Зека постави жетон на неку ивичну тачку која још није уклоњена. Да ли Зека има победничку стратегију? *(Кипар)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Претпоставимо да је $f(2)>2$. Тада је $f(p)^{f(2)}=f(2)^{f(p)}+p^2-2^p$ парно за $p\in\mathbb{P}$, $p>2$, па мора бити $f(p)=2$ за свако $p>2$, али то је немогуће јер тада једначина из задатка не важи за нпр. $(p,q)=(3.5)$. Према томе, $f(2)=2$, па сада за $q=2$ имамо

$$2^p-p^2=2^{f(p)}-f(p)^2. \qquad (*)$$

Одавде је $f(p)\neq 2$ за $p>2$. С друге стране, за све целе бројеве $x>y>2$ важи $2^x-x^2>2^y-y^2$. Ово следи индукцијом из неједнакости $\left(2^{y+1}-(y+1)^2\right)-\left(2^y-y^2\right)=2^y-2y-1>0$ за $y\geqslant 3$. Сада из $(*)$ одмах закључујемо да је $f(p)=p$. Ова функција тривијално задовољава услове.

2. Како је $3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2=(ab+bc+ca)^2$, имамо $ab+bc+ca\geqslant 3$. Из $bc\geqslant ca\geqslant ab$ следи $bc\geqslant 1$. Означимо $\sqrt{bc}=x\geqslant 1$. Тада је $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}=2x$, па је из услова задатка

$$a=\frac{b+c-bc}{b+c-1}=1-\frac{bc-1}{b+c-1}\geqslant 1-\frac{x^2-1}{2x-1}=\frac{x(2-x)}{2x-1},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $b=c=x$.

(1°) Ако је $x\geqslant 2$, очигледно је $(a+1)\sqrt{bc}\geqslant 2(a+1)\geqslant 2$, а једнакост важи само ако је $a=0$ и $b=c=x=2$, тј. $(a,b,c)=(0,2,2)$.

(2°) Ако је $x<2$, онда је $(a+1)\sqrt{bc}=ax+x\geqslant\frac{x^2}{2x-1}\cdot(2-x)+x\geqslant(2-x)+x=2$, јер је $\frac{x^2}{2x-1}=1+\frac{(x-1)^2}{2x-1}\geqslant 1$. Једнакост важи само ако је $b=c=x=1$ и $a=\frac{2x-x^2}{2x-1}=1$, тј. за $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Друго решење. Означимо $k=a+b+c$. Приметимо да из $k=ab+bc+ca\geqslant a(a+b+c)=ak$ следи $a\leqslant 1$.

Имамо $b+c=k-a$ и $bc=k-a(b+c)=(1-a)k+a^2$. Сада се услов $(b+c)^2\geqslant 4bc$ своди на $k^2+(2a-4)k-3a^2\geqslant 0$, па због $k>0$ добијамо $k\geqslant 2-a+2\sqrt{a^2-a+1}$. Одавде је

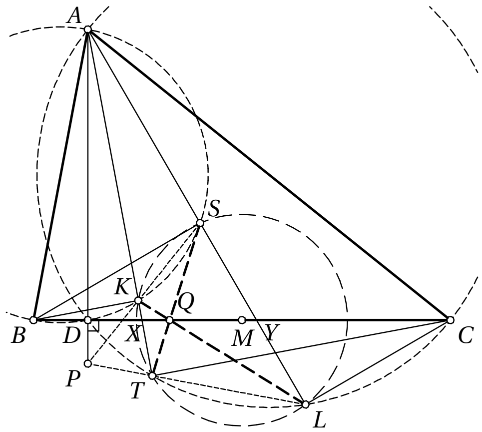
$$\begin{aligned}(a+1)\sqrt{bc}&=(a+1)\sqrt{(1-a)k+a^2}\\&\geqslant(a+1)\sqrt{(1-a)\left(2-a+2\sqrt{a^2-a+1}\right)+a^2}=(a+1)\left(1-a+\sqrt{a^2-a+1}\right)=F.\end{aligned}$$

Међутим, услов $F\geqslant 2$ је еквивалентан са $(a+1)\sqrt{a^2-a+1}\geqslant a^2+1$, што се квадрирањем своди на очигледно тачну неједнакост $a^3+a\geqslant 2a^2$. Једнакост се достиже за $a=0$ и $a=1$ уз услов $b=c$, тј. за тројке $(0,2,2)$ и $(1,1,1)$.

3. По услову задатка је $\triangle ABK\sim\triangle ACL$ и $\triangle ABS\sim\triangle ACT$, па је $\frac{AK}{AL}=\frac{AB}{AC}=\frac{AS}{AT}$, тј. $AK\cdot AT=AL\cdot AS$. Следи да тачке K, L, S и T леже на неком кругу k. Средиште M странице BC лежи на симетралама дужи KT и LS, па је то центар круга k.

Нека је D подножје висине из темена A. Круг k_1 над пречником AB пролази кроз тачке D, K и S, а круг k_2 над пречником AC пролази кроз тачке D, L и T. Радикалне осе парова кругова (k,k_1), (k,k_2) и (k,k_3) су редом праве KS, LT и AB и секу се у радикалном центру P ова три круга.

Ако се сада праве KL и ST секу у тачки Q, по Брокаровој теореми за четвороугао $KSLT$ права AP је полара тачке Q у односу на круг k, па је $MQ \perp AP$, тј. $MQ \parallel BC$, одакле следи да Q лежи на правој BC.



Друго решење. Нека праве KL и ST редом секу праву BC у тачкама Q_1 и Q_2. По Менелајевој теореми је $\frac{XQ_1}{Q_1Y} = \frac{XK}{KA} \cdot \frac{AL}{LY}$ и $\frac{XQ_2}{Q_2Y} = \frac{XT}{TA} \cdot \frac{AS}{SY}$, па како праве KL и ST или обе секу дуж XY или ниједна, довољно је доказати да је $\frac{XQ_1}{Q_1Y} = \frac{XQ_2}{Q_2Y}$, тј.

$$\frac{AK}{AL} \cdot \frac{AS}{AT} \cdot \frac{XT}{XK} \cdot \frac{YL}{YS} = 1.$$

Из сличности $\triangle ABK \sim \triangle ACL$, $\triangle ABS \sim \triangle ACT$, $\triangle BXK \sim \triangle CXT$ и $\triangle CYL \sim \triangle BYS$ следи $\frac{AK}{AL} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{AS}{AT} = \frac{AB}{AC}$ и $\frac{XT}{XK} \cdot \frac{YL}{YS} = \frac{CT}{BK} \cdot \frac{CL}{BS} = \frac{CT}{BS} \cdot \frac{CL}{BK} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AC}{AB}$. Множењем добијамо тражену једнакост.

4. Меда може да спречи Зеку да победи. Медину стратегију описаћемо на ивици $y = 2019$ - на осталим ивицама он игра аналогно.

У првом потезу Меда уклања тачке $(-1, 2019)$ и $(0, 2019)$. Након тога:

(i) Ако Зека својим потезом смањи x-координату, Меда уклања прве две доступне тачке лево од тачке $(0, 2019)$;

(ii) Ако Зека не промени x-координату, Меда уклања прву доступну тачку лево и прву десно од тачке $(0, 2019)$;

(iii) Ако Зека повећа x-координату, Меда уклања прве две доступне тачке десно од тачке $(0, 2019)$.

(iv) Једино одступање је када Зека први пут смањи x-координату за тачно 1: тада Меда уклања прву доступну тачку лево и прву десно од $(0, 2019)$.

Претпоставимо да ће Зека ипак победити доласком до неке тачке $(a, 2019)$. Можемо да сматрамо да је $a > 0$. Заиста, да се Зека кретао симетричном путањом до тачке $(-a, 2019)$, Меда би стигао да уклони бар онолико тачака лево од нуле колико је у овом случају уклонио десно од нуле.

Посматрајмо величину

$$\Delta = 2x + y - 3k,$$

где је (x, y) тренутна позиција жетона, а k најдешња уклоњена тачка. Видимо:

- Ако Зека помери жетон за вектор $(-1, 2)$, $(0, 3)$ или $(3, 0)$, након његовог и Мединог потеза Δ се не мења.
  Ипак, због (iv), први пут када га помери за вектор $(-1, 2)$, Δ опада за 3.
- Ако Зека помери жетон за вектор $(2, 1)$, након његовог и Мединог потеза Δ опада за 1;
- У сваком другом случају Δ опада за бар 2.

Након првог Медининог потеза је $\Delta = 0$, па пре Зекиног последњег потеза мора бити $\Delta \leqslant 0$. Међутим, у том тренутку је $\Delta = 2x + y - 3k \geqslant 2(a-2) + 2018 - 3(a-1) = 2017 - a \geqslant -1$, па је $a \geqslant 2017$ и Δ никад није опало за више од 1. Следи да су сви дотадашњи Зекини потези били за вектор $(0,3)$ или $(3,0)$, осим можда једног за вектор $(2,1)$, па је у том тренутку $(x,y) \equiv (0,0)$ или $(x,y) \equiv (2,1) \pmod 3$. Како Зека има победу у највише три корака, једина могућност је $(x,y) = (2018, 2017)$. Међутим, тада је $\Delta = 6053 - 3k > 0$, што је контрадикција.

Друго решење (J. Тороманович). Показаћемо другачију Медину стратегију на ивици $y = 2019$. Доступне ивичне тачке на овој ивици зваћемо *излазима*.

У првих $672\frac{1}{2}$ потеза, шта год Зека играо, Меда затвара свих 1345 излаза облика $(x, 2019)$ за $3 \mid x$, а 673-ћи потез завршава затварањем излаза тренутно најближег Зеки (било ког, ако их има два). Надаље, након сваког Зекиног потеза Меда уклања два излаза најближа Зеки (било која, ако их има више).

Показаћемо индукцијом по $n \geqslant 673$ да се Зека пред свој n-ти потез налази на растојању бар 4 (по координатама) од најближег излаза.

Нека је $n = 673$. Зека је или у тачки $(0, 2016)$ или испод праве $y = 2016$, а излаз $(0, 2019)$ је Меда већ затворио, па тврђење важи.

Нека је $n = 674$. Означимо Зекину тренутну позицију са (x_0, y_0). Ако је $y_0 < 2018$, једина три излаза на растојању $\leqslant 3$ од Зеке су $(x_0 \pm 1, 2019)$ и $(x_0, 2019)$, од којих је један већ затворен, а Меда у свом n-том потезу затвара преостала два. Ако је $y_0 = 2018$, онда је $x_0 = \pm 1$; нека је без смањења општости $x = 1$. Међу излазима $(a, 2019)$ за $-1 \leqslant a \leqslant 3$ три су већ затворена, а Меда сада затвара преостала два.

Нека је $n > 674$ и нека је (x_1, y_1) Зекина позиција после $n-2$ потеза. Сви излази су на растојању бар 4 од Зеке. Од три излаза $(x_1 \pm 1, 2019)$ и $(x_1, 2019)$ један је већ затворен, а Меда у свом $(n-1)$-вом потезу затвара преостала два (ако су отворени). Посматрајмо Зекин $(n-1)$-ви потез.

(1°) Претпоставимо да Зека скреће удесно (случај када скрене улево је аналоган). Најближи излаз лево од праве $x = x_1$ има x-координату не већу од $x_1 - 2$ и он му је на растојању бар 4. С друге стране, десно од праве $x = x_1$ на растојању 3 или мањем највише два излаза су отворена, а Меда их својим n-тим потезом затвара.

(2°) Ако Зека не мења x-координату, Меда у свом n-том потезу затвара излазе $(x_1 \pm 2, 2019)$ (ако су отворени), те ће Зекин најближи излаз опет бити на растојању бар 4.

Према томе, Зека никад неће добити прилику да победи.

Треће решење (А. Милојевић). Претпоставимо да Зека има победничку стратегију. Тада Меда не може да спречи Зеку ни да дође до излаза на ивици $y = 2019$ (у супротном би могао аналогно да га спречи и на остале три ивице).

Обојмо тачке решетке у две боје попут шаховске табле. За две тачке A и B на решетки пишемо $B \succeq A$ ако су истобојне и полуправа AB сече ивичну праву $y = 2019$ под углом од бар 45° (или је $B = A$).

Лема 1. Нека је $P' \succeq P$. Ако Зека може да направи корак из тачке P у тачку Q, онда може и да направи корак из P' у тачку Q' такву да је $Q' \succeq Q$.

Доказ. Ако је $P' = P$, може се узети $Q' = Q$. У супротном, за Q' се може узети бар једна од тачака непосредно лево и десно од тачке P'. □

Последица. Ако Зека у једном потезу може да дође из тачке P у тачку R, онда у једном потезу може да дође и из тачке P' у тачку R' такву да је $R' \succeq R$. $\square$

Позиција у игри је одређена положајем Зеке P и скупом уклоњених ивичних тачака Σ - означавамо је са (P, Σ).

Лема 2. Нека је $P' \succeq P$. Ако је позиција (P, Σ) победничка за Зеку у n потеза (он је на потезу), онда је и позиција (P', Σ) победничка за Зеку у n потеза.

Доказ. Ако је $n = 1$, тј. Зека има потез из тачке P у неуклоњену ивичну тачку A, онда би и из тачке P' имао потез до A.

Тврђење доказујемо индукцијом по $n > 1$. Зека има добитнички потез из P у неку тачку Q тако да, које год ивичне тачке A_1, A_2 Меда уклонио, позиција $(Q, \Sigma \cup \{A_1, A_2\})$ је победничка за Зеку у $n-1$ потеза. С друге стране, из тачке P' он може стићи у једном потезу у тачку Q' такву да је $Q' \succeq Q$, а по индуктивној претпоставци позиција $(Q', \Sigma \cup \{A_1, A_2\})$ је победничка за Зеку у $n-1$ потеза за ма које ивичне тачке A_1, A_2. Следи да је (P', Σ) победничка позиција за Зеку у n потеза, чиме је индуктивни корак завршен. $\square$

Из Леме 2 следи да, ако је у неком моменту Зекин потез надоле (односно налево/надесно) добитнички, онда је то и потез налево или надесно (односно нагоре). Према томе, Зека има победничку стратегију у којој из тачке $(0,0)$ иде право нагоре до тачке $(0,2018)$, а потом се креће само лево или десно.

Међутим, Меда може да осујети овакву Зекину стратегију, што значи да може и сваку другу. Покажимо ово. Након 672 потеза Зека је у тачки $(0,2016)$, а у 673-ћем скаче још два корака горе и (без смањења општости) један десно, чиме стиже у тачку $(1,2018)$. Претпоставимо да за то време, у своја 674 потеза, Меда уклања тачке $(x,2019)$ за $-673 \leqslant x \leqslant 674$. Надаље се Зека креће само лево или десно, док Меда након сваког Зекиног потеза уклања две најближе доступне ивичне тачке у смеру Зекиног кретања. Дакле, да би Зека дошао до тачке $(a,2019)$, $a > 0$ (случај $a < 0$ је сличан), требаће му бар $\lceil a/3 \rceil$ потеза, али Меда ће за то време уклонити све тачке $(x,2019)$ са $0 \leqslant x \leqslant 672 + 2\lceil a/3 \rceil$, а за $a \leqslant 2018$ важи $672 + 2\lceil a/3 \rceil \geqslant a$.

Напомена. Ако се Зеки дозволи да направи један потез који се састоји од само два корака (уместо три), он ће имати победничку стратегију. Заиста, тада се он након 673 потеза може обрети у тачки $(0,2018)$, а након Мединог 674-тог потеза на бар једној страни y-осе биће највише 673 уклоњених тачака. Тада Зека креће на ту страну скоковима дужине 3 и успева да победи.

Такође, ако се број 2019 из задатка замени са $N > 1$, Зека има победничку стратегију ако и само ако $3 \nmid N$.