2. maj 2019.
Language: Serbian

1. задатак.

Означимо са $\mathbb{P}$ скуп свих простих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ такве да важи

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q$$

за све $p, q \in \mathbb{P}$.

2. задатак.

Реални бројеви a, b и c су такви да важи $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ и $a+b+c = ab+bc+ca > 0$. Доказати неједнакост

$$(a+1)\sqrt{bc} \geqslant 2.$$

Одредити све тројке (a, b, c) за које се достиже једнакост.

3. задатак.

Дат је оштроугли разностраничан троугао ABC. Нека су X и Y различите тачке унутар дужи BC такве да је $\sphericalangle CAX = \sphericalangle YAB$. Означимо са:

(1°) K и S - редом подножја нормала из темена B на праве AX и AY;

(2°) T и L - редом подножја нормала из темена C на праве AX и AY.

Доказати да се праве KL и ST секу на правој BC.

4. задатак.

Решетка је скуп свих тачака облика (m, n), где су m и n цели бројеви за које је $|m| \leqslant 2019$, $|n| \leqslant 2019$ и $|m| + |n| < 4038$. Тачке (m, n) на решетки са $|m| = 2019$ или $|n| = 2019$ зовемо *ивичним*. Четири праве $x = \pm 2019$ и $y = \pm 2019$ зовемо *ивицама*. Две тачке на решетки су *суседне* ако је растојање између њих 1.

Зека и Меда играју игру на решетки. Они играју наизменично, при чему Зека почиње игру постављањем жетона на тачку $(0, 0)$, а Меда повлачи први потез.

(1°) У сваком свом потезу Меда уклања највише две ивичне тачке са сваке од ивица.

(2°) У сваком свом потезу Зека прави тачно три *корака*. Корак се састоји од померања жетона на једну од суседних тачака које нису уклоњене.

Игра се завршава Зекином победом чим Зека постави жетон на неку ивичну тачку која још није уклоњена. Да ли Зека има победничку стратегију?

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 10 бодова.