14^{th} International Zhautykov Olympiad in Mathematics

Almaty , January 10-16, 2018

Први дан – 12.1.2018.

1. Нека су α, β и γ углови троугла наспрам страница a, b и c, редом. Доказати неједнакост

$$2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)\geqslant\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

2. На страницама AB, BC и CA троугла ABC редом узете су тачке N, K и L тако да је $AL=BK$ и CN је симетрала угла код темена C. Дужи AK и BL секу се у тачки P. Означимо са I и J редом центре уписаних кругова троуглова APL и BPK. Нека се праве CN и IJ секу у тачки Q. Доказати да је $IP=JQ$.

3. Доказати да постоји бесконачно много парова природних бројева (m,n) за које је број $(m!)^n+(n!)^m+1$ дељив са $m+n$.

Други дан – 13.1.2018.

4. Крокодил је замислио четири поља таблице 2018×2018 која образују правоугаоник са страницама 1 и 4. Медвед може да одабере било који квадрат који се састоји од 9 поља и упита да ли он садржи макар једно од замишљених поља. Са колико најмање питања медвед може да буде сигуран да ће добити бар један потврдан одговор?

5. Наћи све реалне вредности a за које постоји функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква да важи

$$f(x-f(y))=f(x)+a[y]$$

за све реалне бројеве x и y (где $[y]$ означава цео део броја y).

6. У круг полупречника R уписан је конвексан шестоугао $ABCDEF$. Дијагонале AD и BE, BE и CF, AD и CF шестоугла $ABCDEF$ секу се у тачкама M, N и K, редом. Нека су r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 редом полупречници уписаних кругова троуглова ABM, BCN, CDK, DEM, EFN, AFK. Доказати да важи

$$r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6\leqslant R\sqrt{3}.$$

Време за рад: 270 минута сваког дана.
Сваки задатак вреди 7 поена.