Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

12. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

30. март 2018.

Први дан

1. Кружница уписана у $\triangle ABC$ има центар у тачки I и додирује страницу BC у тачки D. На дужима BI и CI одабране су тачке P и Q, редом, такве да важи $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle PAQ$. Доказати: $\sphericalangle PDQ = 90^\circ$. *(Душан Ђукић)*

2. Дат је природан број n, $n > 1$. Цео број x зовемо *красним* ако је остатак броја x^2 при дељењу са n непаран. Доказати да не постоји више од $1+\lfloor\sqrt{3n}\rfloor$ узастопних красних природних бројева. *(Душан Ђукић)*

3. У равни је дато n правих међу којима никоје две нису паралелне и никоје три се не секу у једној тачки. Под *пресечним тачкама* сматрамо све тачке у којима се секу неке две од ових правих.

(а) Доказати да међу датим правим постоји једна са чије се сваке стране налази бар по

$$\left\lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rfloor$$

пресечних тачака (тачке на тој правој се не рачунају).

(б) За које вредности n се оцена из дела под (а) не може побољшати? *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

12. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. март 2018.

Други дан

4. Доказати да постоји тачно један полином $P(x)$ с реалним коефицијентима за који је полином

$$(x+y)^{1000} - P(x) - P(y)$$

дељив полиномом $xy - x - y$. *(Душан Ђукић)*

5. Нека су a и b непарни природни бројеви већи од 1. Посматрајмо таблу $a \times b$ којој недостају поља $(2,1)$, $(a-2,b)$ и (a,b) (под пољем (i,j) подразумевамо поље у пресеку врсте i и колоне j). Претпоставимо да је оваква табла поплочана помоћу 2×1 домина и 2×2 квадрата (домине се могу ротирати). Доказати да је употребљено бар $\frac{3}{2}(a+b) - 6$ домина. *(Никола Петровић)*

6. За задат природан број k, нека је n_k најмањи природан број такав да постоји коначан скуп A целих бројева са следећим особинама:

- за свако $a \in A$ постоје $x, y \in A$ (не обавезно различити) такви да

$$n_k \mid a - x - y;$$

- не постоји подскуп B скупа A за који важи $|B| \leqslant k$ и $n_k \mid \sum_{b \in B} b$.

Доказати да за све k, $k \geqslant 3$, важи

$$n_k < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2}.$$

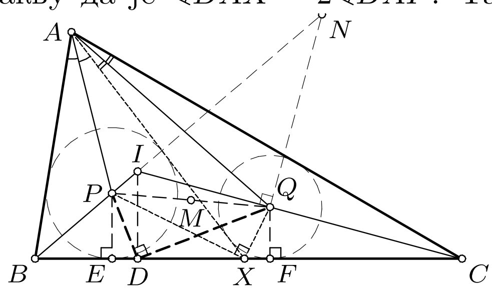
(Бојан Башић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. Означимо са E и F редом подножја нормала из P и Q на праву BC, а са M средиште дужи PQ.

Посматрајмо тачку X на страници BC такву да је $\sphericalangle BAX = 2\sphericalangle BAP$. Тада је такође $\sphericalangle CAX = \sphericalangle BAC - 2\sphericalangle BAP = 2\sphericalangle CAQ$, па су P и Q редом центри уписаних кругова троуглова BAX и CAX. Следи да су XP и XQ симетрале углова BXA и CXA, па је $\sphericalangle PXQ = 90^\circ$. Услов $\sphericalangle PDQ = 90^\circ$ је еквивалентан са $MD = MP = MQ = MX$, а како је $ME = MF$, довољно је доказати да је $DE = XF$. Обе дужине се једноставно рачунају на основу "великог задатка": $DE = BD - BE = \frac{AB+BC-AC}{2} - \frac{AB+BX-AX}{2} = \frac{CX-AC+AX}{2} = XF$.



Друго решење. Нека права BI поново сече описани круг $\triangle APQ$ у тачки N. Имамо $\sphericalangle AIN = 180^\circ - \sphericalangle BIA = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle DIQ$. Такође, како је $\sphericalangle INQ = \sphericalangle PAQ = \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle IQN = \sphericalangle BIC - \sphericalangle INQ = (90^\circ + \frac{\alpha}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, имамо $\frac{IQ}{IN} = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{IA}{ID}$, одакле је $\frac{IA}{IN} = \frac{ID}{IQ}$. Следи да су троуглови DIQ и AIN слични, па је $\sphericalangle IDQ = \sphericalangle IAN = 180^\circ - \sphericalangle AIN - \sphericalangle ANI = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) - \sphericalangle ANP = 90^\circ + \frac{\gamma}{2} - \sphericalangle AQP$. Аналогно је $\sphericalangle IDP = 90^\circ + \frac{\beta}{2} - \sphericalangle APQ$, па сабирањем добијамо $\sphericalangle PDQ = 180^\circ + \frac{\beta+\gamma}{2} - (180^\circ - \sphericalangle PAQ) = 90^\circ$.

2. Ако је n паран број, тврђење је тривијално: тада не постоје ни два узастопна красна броја, јер парни бројеви нису красни. Надаље сматрамо да је n непаран.

Пошто бројеви дељиви са n нису красни, можемо да се ограничимо на бројеве $x \in \{1, \dots, n-1\}$. Претпоставимо да су бројеви x и $x+1$ красни. Остаци бројева x^2 и $(x+1)^2$ при дељењу са n, који су непарни, једнаки су $x^2 - n[\frac{x^2}{n}]$ и $(x+1)^2 - n[\frac{(x+1)^2}{n}]$ редом, па су $[\frac{x^2}{n}]$ и $[\frac{(x+1)^2}{n}]$ различите парности. Како због $0 < (x+1)^2 - x^2 < 2n$ важи $0 \leqslant [\frac{(x+1)^2}{n}] - [\frac{x^2}{n}] \leqslant 2$, следи да је $[\frac{(x+1)^2}{n}] = [\frac{x^2}{n}] + 1$. Према томе, ако су бројеви $x, x+1, \dots, x+k$ красни, онда је

$$m = y - \left[\frac{y^2}{n}\right] \quad \text{константно за све} \quad y = x, x+1, \dots, x+k.$$

Како је једнакост $y - [\frac{y^2}{n}] = m$ еквивалентна са $y - m \leqslant \frac{y^2}{n} < y - m + 1$, тј. са $n(\frac{n}{4} - m) \leqslant (y - \frac{n}{2})^2 < n(\frac{n}{4} - m + 1)$, број узастопних бројева y са овим својством није већи од $[\sqrt{n(\frac{n}{4} - m + 1)} - \sqrt{n(\frac{n}{4} - m)}] + 1 \leqslant [\sqrt{n}] + 1$ ако је $m \leqslant [\frac{n}{4}]$, и није већи од $2[\sqrt{n\{\frac{n}{4}\}} + \frac{1}{2}] \leqslant [\sqrt{3n}] + 1$ за $m = [\frac{n}{4}] + 1$.

Напомена. Једнакост се може достићи ако и само ако је $n \equiv 3 \pmod 8$, $3n$ није квадрат и $[\sqrt{3n}]$ је непарно.

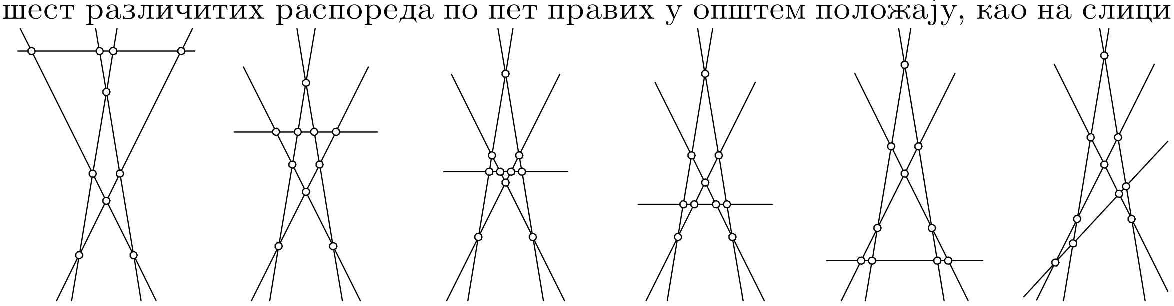
3. За сваку од датих правих, пресечних тачака ван ње има

$$m = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\ .$$

Претпоставимо да, за сваку праву, с једне њене стране има не више од k пресечних тачака, где је $k \leqslant \frac{n}{2}$. Пребројмо на два начина тројке (p, A, B), где су A и B пресечне тачке са различитих страна праве p. По претпоставци, за сваку праву p има не више од $k(m-k)$ оваквих тројки, па је њихов укупан број $N \leqslant nk(m-k)$.

Размотримо сада два типа оваквих тројки: *тип 1*, када су тачке A и B на истој од датих правих, и *тип 2*, када нису.

Свака четворка датих правих, заједно са њима одређеним пресечним тачкама, одређује тачно 4 тројке типа 1, а свака тројка је одређена тачно једном четворком правих. Следи да има $4\binom{n}{4}$ тројки типа 1. Такође, свака петорка датих правих са њима одређеним пресечним тачкама одређује бар 5 тројки типа 2, те тројки типа 2 има бар $5\binom{n}{5}$. Ово се директно проверава: постоји шест различитих распореда по пет правих у општем положају, као на слици.



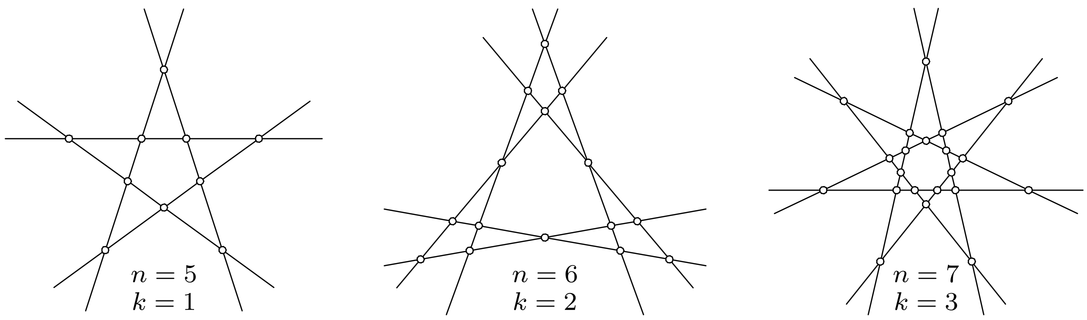
Према томе, $N \geqslant 4\binom{n}{4} + 5\binom{n}{5} = n\binom{n}{4}$.

Следи да је $k(m-k) \geqslant \binom{n}{4} = \frac{m(m-1)}{6}$. Одавде се добија

$$k \geqslant k_0 = \frac{1}{2}\left(m - \sqrt{\frac{m^2+2m}{3}}\right).$$

Како се неједнакост $k_0 > \frac{m}{5} = \frac{(n-1)(n-2)}{10}$ своди на $m > 25$, што важи за $n \geqslant 9$, док за $n = 8$ имамо $k_0 > [\frac{m}{5}] = 4$, остаје да испитамо случајеве $n \leqslant 7$.

За $n \leqslant 4$ је тврђење тривијално, као и достизање једнакости, јер је тада $k_0 = [\frac{m}{5}] = 0$. За $n = 5, 6, 7$ је редом $\lceil k_0 \rceil = [\frac{m}{5}] = 1, 2, 3$, па тврђење задатка и тада важи, а достижу се и једнакости у случајевима на слици.



Напомена. С друге стране, свака петорка одређује највише 7 тројки (p, A, B) типа 2. Овако се може показати да увек постоји права са чије се једне стране налази мање од $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{15}}\right) m$ тачака.

4. Означимо $n = 1000$. Сменом $x = u+1$ и $y = v+1$ добијамо да полином $uv-1$ дели полином $P(u+1)+P(v+1)-(u+v+2)^n$. Еквивалентан услов је да је $P(u+1)+P(v+1)-(u+v+2)^n = 0$ кад год је $uv-1=0$ (видети *напомену*). Тако за $u \neq 0$ и $v = \frac{1}{u}$ имамо $P(u+1)+P(\frac{1}{u}+1) = (u+\frac{1}{u}+2)^n = \frac{(u+1)^{2n}}{u^n}$. Полином $Q(x) = P(x+1) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ задовољава

$$2a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i(u^i+u^{-i}) = Q(u)+Q\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{(u+1)^{2n}}{u^n} = \binom{2n}{n}+\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n-i}(u^i+u^{-i}),$$

одакле одмах следи да је $a_0 = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ и $a_i = \binom{2n}{n-i}$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Дакле,

$$P(x) = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}+\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n-i}(x-1)^i.$$

Друго решење. Тражимо полиноме $P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ и $Q(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^j$ такве да је

$$A(x,y) = (xy-x-y)Q(x,y) = (x+y)^{1000}-P(x)-P(y). \qquad (*)$$

Приметимо да је $\deg Q \leqslant 998$. Заиста, ако је $a_{i,j}x^iy^j$ моном највећег степена у $Q(x,y)$, онда је коефицијент уз $x^{i+1}y^{j+1}$ у $A(x,y)$ једнак $a_{i,j} \neq 0$, па је $i+j+2 \leqslant 1000$. Следи да је $\deg A \leqslant 1000$, па је и $\deg P \leqslant 1000$.

Изједначавање коефицијената уз x^iy^j у $(*)$ даје једнакости $a_{i-1,j-1} = \binom{1000}{i}$ за $i+j = 998$ $(i,j>0)$, $a_{i-1,j-1} = a_{i-1,j}+a_{i,j-1}$ за $i+j<998$ $(i,j>0)$ и $a_{i-1,0} = a_{0,i-1} = p_i$, одакле једноставном индукцијом налазимо $a_{i-1,j-1} = \binom{2000-i-j}{1000-i}$ за $i+j \leqslant 1000$ $(i,j>0)$ и $p_i = \binom{1999-i}{999}$, тј.

$$P(x) = x^{1000}+\binom{1000}{999}x^{999}+\binom{1001}{999}x^{998}+\cdots+\binom{1998}{999}x.$$

Из конструкције следи да овај полином задовољава услове задатка.

Треће решење. Не постоје два различита полинома са жељеним својством. Заиста, ако $P_1(x) \not\equiv P_2(x)$ имају то својство, онда $xy-x-y$ дели разлику $P_1(x)+P_1(y)-P_2(x)-P_2(y) = (xy-x-y)U(x,y)$. Међутим, ако је cx^iy^j моном највећег степена у $U(x,y)$, онда је коефицијент уз $x^{i+1}y^{j+1}$ на левој страни ове једнакости једнак $c \neq 0$, што је немогуће.

Докажимо сада да за сваки симетричан полином $Q(x,y)$ постоји полином $P(t)$ такав да $xy-x-y \mid Q(x,y)-P(x)-P(y)$. Довољно је доказати да за полиноме Q облика $x^iy^j+x^jy^i$ $(0 \leqslant i \leqslant j)$ постоји тражени полином $P_{i,j}(t)$. Тврђење је тривијално за $i=0$. За $i>0$ доказ спроводимо индукцијом по $i+j$. Наиме, $x^iy^j+x^jy^i \equiv (x+y)(x^{i-1}y^{j-1}+x^{j-1}y^{i-1}) = (x^iy^{j-1}+x^{j-1}y^i)+(x^{i-1}y^j+x^jy^{i-1}) \pmod{xy-x-y}$, па можемо узети $P_{i,j}(t) = P_{i,j-1}(t)+P_{i-1,j}(t)$.

Напомена. Ако је $P(x,y)$нерастављив полином и $Q(x,y)$ полином такав да је $Q(x,y)=0$ кад год је $P(x,y)=0$, онда је полином Q дељив полиномом P. Ово није потпуно тривијално. У прстену полинома $\mathbb{R}[y][x]$ Еуклидовим алгоритмом могу се наћи полиноми $A(x,y)$, $B(x,y)$ и $C(y)$ такви да је $\deg_x B < \deg_x P$ и $A\cdot P - B\cdot Q = C(y)$. Дакле, кад год је $Q(x,y)=0$, важи $C(y)=0$, па C има бесконачно много нула, одакле је $C \equiv 0$ и $P \mid B \cdot Q$. Због нерастављивости полинома P и јединствености факторизације у прстену $\mathbb{R}[y][x]$ следи $P \mid Q$.

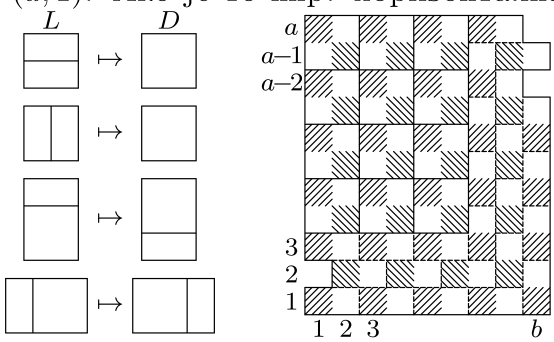
5. Упишимо у поље (i,j) број $(-1)^{i+j}(i+j)$. Збир уписаних бројева у читавој таблици је $\sum_{i=1}^{a}(-1)^i \sum_{j=1}^{b}(-1)^j(i+j) = \sum_{i=1}^{a}(-1)^{i+1}(i+\frac{b+1}{2}) = \frac{a+b+2}{2}$, а ако се три наведена поља избаце, збир у остатку таблице је

$$\frac{a+b+2}{2} - (-3) - (a+b-2) - (a+b) = -\frac{3}{2}(a+b) + 6.$$

Како је збир бројева у сваком квадрату 2×2 једнак нули, а збир у свакој домини је 1 или -1, потребно је бар $\frac{3}{2}(a+b) - 6$ домина.

Друго решење. Нека су врсте и колоне нумерисане одоздо нагоре и слева надесно. Можемо да сматрамо да се у поплочавању не појављује ниједна од целина означених са L на слици - заиста, оне се могу заменити одговарајућим целинама означеним са D, притом не повећавајући број домина.

Размотримо фигуру која покрива поље $(a,1)$. Ако је то нпр. хоризонтална домина $(a,1)-(a,2)$ (аналогно се испитује случај вертикалне домине), онда поље $(a-1,1)$ не може бити покривено ни квадратом ни хоризонталном домином (јер би они са горњом домином градили једну од целина L), па оно мора бити покривено вертикалном домином $(a-1,1)-(a-2,1)$. Слично, сада поље $(a-1,2)$ мора бити покривено домином $(a-1,2)-(a-1,3)$, итд. до бесконачности, што је немогуће. Према томе, фигура која покрива поље $(a,1)$ је квадрат.



На сличан начин, поља $(a,3)$ и $(a-2,1)$ су такође покривена квадратима, затим поља $(a,5)$, $(a-2,3)$ и $(a-4,1)$, итд. Настављајући овај поступак, закључујемо да су сва поља осим оних у врстама $1,2,3$ и оних у колонама $b-2, b-1, b$ покривена квадратима. Преостала поља се могу поплочати на јединствен начин, приказан на слици, што се директно проверава. При томе је употребљено тачно $\frac{3}{2}(a+b)-6$ домина.

Треће решење. Обојићемо поља табле црно и бело попут шаховске табле. Праву која раздваја i-ту и $(i+1)$-ву врсту/колону зовемо i-том хоризонталом/вертикалом.

Ако је j парно $(2 \leqslant j \leqslant b-1)$, бар једна (хоризонтална) домина сече j-ту вертикалу јер је број поља у првих j колона непаран. С друге стране, ако је j непарно $(1 \leqslant j \leqslant b-2)$, бар две домине морају сећи j-ту вертикалу јер у првих j колона има за два више црних поља него белих. Овако добијамо бар $\frac{3b-3}{2}$ хоризонталних домина.

Слично, ако је i парно $(2 \leqslant i \leqslant a-3)$ или $i \in \{1, a-2\}$, бар једна (вертикална) домина сече i-ту хоризонталу јер је број поља у првих i врста непаран. С друге стране, ако је i непарно $(3 \leqslant i \leqslant a-4)$, број црних поља у првих i

врста је за два већи од броја белих, па бар две домине морају сећи i-ту хоризонталу. Овако добијамо бар $\frac{3a-9}{2}$ вертикалних домина.

Дакле, укупно има бар $\frac{3a-9}{2}+\frac{3b-3}{2}=\frac{3}{2}(a+b)-6$ домина.

6. Са F_i означавамо Фибоначијеве бројеве: $F_1=F_2=1$, $F_{i+1}=F_i+F_{i-1}$. Посматрајмо скуп $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{k+1}\}$ са $n=F_{k+2}+3$, где су

$$a_i=(-1)^{k-1-i}F_{i+1} \text{ за } i=1,2,\dots,k-1, \quad a_k=F_k+1 \quad \text{и} \quad a_{k+1}=F_k+2.$$

У случају парног k видимо да је $a_i=a_{i+1}+a_{i+2}$ $(1\leqslant i\leqslant k-3)$, $a_{k-2}\equiv a_k+a_{k+1} \pmod n$, $a_{k-1}=a_{k+1}+a_2$, $a_k=a_{k-1}+a_1$ и $a_{k+1}=a_k+a_1$, па скуп A задовољава први услов задатка. Овај услов се слично проверава и за непарно k.

Докажимо индукцијом по k (база $k=3$ се директно проверава) да је задовољен и други услов, тј. да не постоји подскуп $B\subsetneq A$ такав да $n\mid\sum_{b\in B}b$. Како је збир елемената скупа A једнак нули, можемо да сматрамо без смањења општости (заменом B са $A\setminus B$ по потреби) да B садржи највише један од елемената F_k, F_k+1, F_k+2. Тада је

$$1-F_k=-(F_{k-1}+F_{k-3}+\cdots)\leqslant\sum_{b\in B}b\leqslant(F_k+2)+F_{k-2}+F_{k-4}+\cdots=F_{k+1}+1,$$

па мора бити $\sum_{b\in B}b=0$. На основу индуктивне претпоставке за $k-1$, скуп B не може бити подскуп скупа $\{a_1,a_2,\dots,a_{k-2}\}$, тј. мора бити $a_{k-1}=F_k\in B$. Међутим, тада је $\sum_{b\in B}b\geqslant F_k-F_{k-1}-F_{k-3}-\cdots=1$, што је контрадикција. Доказ је завршен.

Према томе, $n_k\leqslant F_{k+2}+3<\phi^{k-3}(F_5+3)<\phi^{k+2}<(\frac{13}{8})^{k+2}$, где је $\phi=\frac{1+\sqrt5}{2}$.