10-то такмичење „Румунски мастер из математике“

Први дан: Букурешт, петак, 23. фебруар 2018.

Language: Serbian

1. задатак. Нека је P тачка на страници AB тетивног четвороугла $ABCD$. Дуж DP сече дијагоналу AC у тачки Q. Права кроз тачку P паралелна правој CD сече продужетак странице CB преко B у тачки K. Права кроз тачку Q паралелна правој BD сече продужетак странице CB преко B у тачки L. Доказати да се кружнице описане око троуглова BKP и CLQ додирују.

2. задатак. Да ли постоје неконстантни полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ са реалним коефицијентима такви да важи

$$P(x)^{10} + P(x)^9 = Q(x)^{21} + Q(x)^{20}?$$

3. задатак. Ана и Бобан играју игру на бесконачној квадратној решетци повлачећи потезе наизменично, при чему Ана игра прва. У једном потезу играч оријентише једну јединичну дуж решетке која до тад није била оријентисана. Бобан побеђује ако у неком тренутку неке оријентисане дужи чине оријентисани циклус. Да ли Бобан има победничку стратегију?

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сата.

10-то такмичење „Румунски мастер из математике“

Други дан: Букурешт, субота, 24. фебруар 2018.

Language: Serbian

4. задатак. Нека су a, b, c и d природни бројеви такви да је нзд$(a, b, c, d) = 1$ и $ad \neq bc$. Означимо са S скуп свих могућих вредности израза нзд$(an + b, cn + d)$, где је n природан број. Доказати да је S скуп свих позитивних делилаца неког природног броја.

5. задатак. За дати природан број n, дато је $2n$ различитих тачака на кружници. Одредити број начина на које се ове тачке могу повезати помоћу n *стрелица* (усмерених дужи) тако да су следећи услови задовољени:

- свака од ових $2n$ тачака је почетна или крајња тачка неке стрелице;
- никоје две стрелице се не секу;
- не постоје две стрелице $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ такве да су тачке A, B, C, D поређане на кругу у смеру казаљке на сату (не обавезно узастопне).

6. задатак. Дати су круг Γ, његова тангента ℓ и круг Ω који нема заједничких тачака са правом ℓ, при чему су кругови Γ и Ω са различитих страна праве ℓ. Тангенте на круг Γ из промењљиве тачке X на кругу Ω секу праву ℓ у тачкама Y и Z. Доказати да, како се X креће по кругу Ω, описани круг троугла XYZ увек додирује два фиксна круга.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сата.