ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА ТАКМИЧЕЊУ
,,Romanian Master of Mathematics”

27. јануар 2018.

1. Одредити све природне бројеве n са следећим својством: постоје природни бројеви a, b и c, не већи од n, такви да квадратни трином $ax^2 + bx + c$ има две различите реалне нуле које се разликују за највише $\frac{1}{n}$.

2. Нека је P тачка унутар троугла ABC таква да је $\sphericalangle APB \neq 90^\circ$. Праве AP и BP секу странице BC и AC редом у тачкама D и E. Нека су K и L редом ортоцентри троуглова APE и BPD. Доказати да теме C лежи на правој KL ако и само ако је угао ACB прав.

3. Наћи све сурјективне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y).$$

(Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је сурјективна ако узима све реалне вредности.)

4. Нека је n природан број. Дато је $2^n + 1$ различитих скупова, од којих су неки проглашени *црвеним*, а остали *плавим* (у свакој боји бар по један). Сваку симетричну разлику црвеног и плавог скупа зовемо *црним* скупом. Доказати да има бар 2^n различитих црних скупова.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

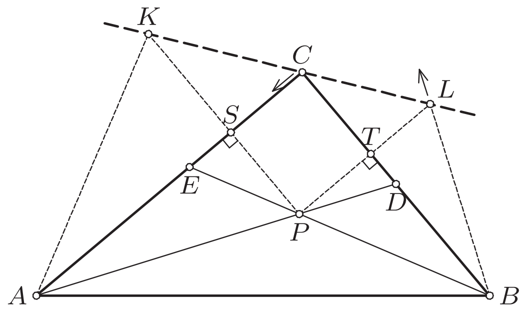
РЕШЕЊА

1. Разлика две нуле тринома је $d = \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 4ac} \geqslant \frac{1}{a}$, па из $d \leqslant \frac{1}{n}$ следи да мора бити $a = n$ и $b^2 - 4ac = 1$. Одавде је b непаран број, тј. $b = 2m + 1$ и $nc = \frac{b^2-1}{4} = m(m+1)$.

- Ако је $n = p^k$ степен простог броја (са $k \geqslant 0$), онда $n \mid m$ или $n \mid m+1$, тако да је $b = 2m + 1 \geqslant 2n - 1$, што је немогуће.
- Ако n није степен простог броја, онда се може представити у облику $n = st$, где су s и t узајамно прости природни бројеви већи од 1. По Кинеској теореми о остацима постоји природан број $\ell < n$ такав да је $\ell \equiv 0 \pmod s$ и $\ell \equiv -1 \pmod t$. Тада $n \mid \ell(\ell+1)$ и $n \mid (n-\ell-1)(n-\ell)$. Можемо узети $m = \min\{\ell, n - \ell - 1\}$, $b = 2m + 1$ и $c = \frac{m(m+1)}{n}$: јасно је да је $b \leqslant 2 \cdot \frac{n-1}{2} + 1 = n$ и $c < \frac{n}{4}$.

Одговор су сви природни бројеви n који нису степени простог броја.

2. Нека је $\sphericalangle ACB = 90°$. Како је $\sphericalangle AKP = 90° - \sphericalangle KPE = \sphericalangle PEC = \sphericalangle BPL$ и аналогно $\sphericalangle APK = \sphericalangle BLP$, следи $\triangle AKP \sim \triangle BPL$. При томе, подножју S висине из A у $\triangle AKP$ одговара подножје T висине из B у $\triangle BPL$, па је $\frac{KS}{CT} = \frac{KS}{SP} = \frac{PT}{TL} = \frac{SC}{TL}$, што значи да су троуглови KSC и CTL слични. Следи да су тачке K, C и L колинеарне.



Претпоставимо сада да је $\sphericalangle ACB > 90°$ и посматрајмо подножје нормале C' из тачке B на праву AC. Ако је D' пресек правих AP и BC', а L' ортоцентар троугла BPD', на основу првог дела задатка тачке K, C' и L' су колинеарне. Међутим, како тачке C и L редом леже на дужи AC' и продужетку дужи BL' преко L', оне не могу бити колинеарне са тачком K. Случај $\sphericalangle ACB < 90°$ се слично испитује.

Друго решење. Нека су R, S и T редом подножја нормала из P на AK, AC и BC. Тачка R лежи на кругу γ_1 над пречником AB, а тачке S и T леже на кругу γ_2 над пречником CP. Како је $KR \cdot KA = KS \cdot KP$, тачка K има једнаку потенцију у односу на кругове γ_1 и γ_2, тј. припада њиховој радикалној оси ℓ. Аналогно, ортоцентри H_1, H_2 и L троуглова ACD, BCE и BDP припадају оси ℓ.

Како је $CH_1 \perp AD$ и $CH_2 \perp BE$, права C лежи на правој ℓ ако и само ако је $H_1 \equiv C$ или $H_2 \equiv C$, тј. $\sphericalangle ACB = 90°$.

Напомена. Права ℓ из другог решења се зове *Оберова права* за праве AC, AP, BC, BP.

3. Дату функционалну једначину означавамо са $(*)$. Убацивањем $x = 0$ добијамо $f(2y) = f(f(0) + 2f(y)) - f(0)$, па се $(*)$ може записати као $f(x+f(x)+2f(y)) = f(2x)+f(2f(y)+f(0))-f(0)$. Како $z = 2f(y)$ узима све реалне вредности, добијамо

$$f(x + f(x) + z) = f(2x) + f(z + f(0)) - f(0), \quad \forall x, z \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Замена $z = x - f(x)$ у (1) даје

$$f(x - f(x) + f(0)) = f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

па стављањем $x = y - f(y) + f(0)$ и $f(x) = f(0)$ у (1) добијамо

$$f(z + y - f(y) + 2f(0)) = f(2y - 2f(y) + 2f(0)) + f(z + f(0)) - f(0). \tag{2}$$

За $z = -f(0)$ следи $f(2y-2f(y)+2f(0)) = f(y - f(y) + f(0)) = f(0)$, тако да (2) постаје

$$f(z + y - f(y) + 2f(0)) = f(z + f(0)). \tag{3}$$

За $z = f(y) - 2f(0)$ у (3) имамо $f(y) = f(f(y) - f(0))$. Како $x = f(y) - f(0)$ узима све реалне вредности, одавде следи $f(x) = x + c$, где је $c = f(0)$. Најзад, убацивањем у једначину $(*)$ налазимо да је ова функција решење само за $c = 0$, тј. $f(x) = x$.

Друго решење. Ако је a такво да је $f(a) = 0$, заменом $x = y = a$ у дату функционалну једначину $(*)$ добијамо $f(2a) = 0$. Сада за $x = 2a$ и $x = a$ редом у $(*)$ добијамо $f(2a+2f(y)) = f(a+2f(y)) = f(2y)$. Како $w = a+2f(y)$ узима све реалне вредности, одавде следи

$$f(w + a) = f(w) \quad \text{кад год је} \quad f(a) = 0 \text{ и } w \in \mathbb{R}, \tag{1'}$$

па имамо и $f(2f(y)) = f(2y)$. Како $z = 2f(y)$ узима све реалне вредности, $(*)$ се своди на

$$f(x + f(x) + z) = f(2x) + f(z). \tag{2'}$$

Замена $z = f(x) - x$ у (2′) даје $f(f(x) - x) = 0$, па у (1′) можемо да узмемо $a = f(x)-x$ и $w = x+f(x)+z$, чиме (2′) постаје $f(2f(x)+z) = f(2x)+f(z) = f(2f(x)) + f(z)$. Притом $y = 2f(x)$ узима све реалне вредности, па имамо $f(y+z) = f(y)+f(z)$ за све y, z. Између осталог, $f(2f(x)) = f(2x) = 2f(x)$, тј. $f(y) = y$ за све y.

4. Тврђење доказујемо индукцијом по $n \in \mathbb{N}_0$. За $n = 0$ оно је тривијално;

претпоставимо да је $n \geqslant 1$.

Ако се сваки црни скуп може добити на само један начин, онда имамо $k(2^n+1-k) \geqslant 2^n$ различитих црних скупова, где је k број црвених скупова. Зато претпоставимо да се неки црни скуп добија на два начина: као $A_1 \triangle B_1 = A_2 \triangle B_2$, где су A_1 и A_2 различити црвени скупови, а B_1 и B_2 плави. Одаберимо елемент a који је у тачно једном од скупова A_1, A_2. Видимо да се a такође налази у тачно једном од скупова B_1, B_2. Поделимо све црвене скупове на фамилију $\mathcal{C}_+$ оних који садрже елемент a и фамилију $\mathcal{C}_-$ оних који га не садрже. Аналогно делимо и плаве скупове на фамилије $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$.

Једна од фамилија $\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{P}_+$ и $\mathcal{C}_- \cup \mathcal{P}_-$ садржи бар $2^{n-1}+1$ скупова, а они по индуктивној претпоставци одређују бар 2^{n-1} црних скупова који не садрже елемент a. Слично, једна од фамилија $\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{P}_-$ и $\mathcal{C}_- \cup \mathcal{P}_+$ садржи бар $2^{n-1}+1$ скупова, а они по индуктивној претпоставци одређују бар 2^{n-1} црних скупова који садрже елемент a. Овако смо добили бар $2^{n-1}+2^{n-1} = 2^n$ (различитих) црних скупова.