59. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Клуж-Напока, Румунија – понедељак, 9. јул 2018.

1. Нека је Γ описана кружница оштроуглог троугла ABC. Тачке D и E налазе се на дужима AB и AC, редом, тако да важи $AD = AE$. Симетрале дужи BD и CE секу краће лукове AB и AC кружнице Γ у тачкама F и G, редом. Доказати да су праве DE и FG паралелне (или једнаке). *(Грчка)*

2. Наћи све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које постоје реални бројеви $a_1, \dots, a_{n+2}$ такви да је $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

за све $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. *(Словачка)*

3. *Антипаскалов троугао* је таблица у облику једнакостраничног троугла која се састоји од бројева тако да, осим за бројеве у последњем реду, важи да је сваки број једнак апсолутној вредности разлике два броја која су непосредно испод њега. На пример, следећа таблица је антипаскалов троугао са четири реда која се састоји од свих природних бројева од 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Да ли постоји антипаскалов троугао са 2018 редова који се састоји од свих природних бројева од 1 до $1 + 2 + \cdots + 2018$? *(Иран)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

59. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Клуж-Напока, Румунија – уторак, 10. јул 2018.

4. *Позиција* је свака тачка (x, y) у равни таква да су x и y природни бројеви не већи од 20.

На почетку, свака од 400 позиција је слободна. Андријана и Бојан играју игру у којој наизменично повлаче потезе, при чему Андријана игра прва. У сваком свом потезу Андријана поставља нови црвени каменчић на слободну позицију тако да је растојање између сваке две позиције на којима се налази црвени каменчић различито од $\sqrt{5}$. У сваком свом потезу Бојан поставља нови плави каменчић на неку слободну позицију. (Позиција на којој се налази плави каменчић може бити на било ком растојању од других позиција на којима се налази неки каменчић.) Игра се завршава када неко од њих не може повући потез.

Одредити највеће K тако да Андријана сигурно може поставити барем K црвених каменчића, без обзира на то како Бојан поставља плаве каменчиће.

(Јерменија)

5. Нека је $a_1, a_2, \ldots$ бесконачан низ природних бројева. Претпоставимо да постоји природан број $N > 1$ такав да је за све $n \geqslant N$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

цео број.

Доказати да постоји природан број M такав да је $a_m = a_{m+1}$ за све $m \geqslant M$.

(Монголија)

6. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да је $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Тачка X се налази у унутрашњости четвороугла $ABCD$ тако да важи

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \quad \text{и} \quad \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

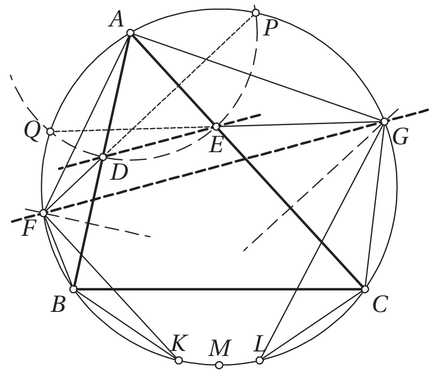
Доказати да је $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180^\circ$. *(Пољска)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. Посматрајмо тачке K и L на кругу Γ такве да је $\sphericalangle FBK = \sphericalangle FDA$ и $\sphericalangle GCL = \sphericalangle GEA$. Како је $\sphericalangle FKB = \sphericalangle FAD$ и $FB = FD$, важи $\triangle FBK \cong \triangle FDA$. Аналогно важи $\triangle GCL \cong \triangle GEA$. Следи да је $FK = FA$ и $GL = GA$, а такође и $KB = AD = AE = LC$, одакле је $KL \parallel BC$. Ако је сада M средиште краћег лука BC, имамо $\widehat{MG} + \widehat{AF} = \widehat{ML} + \widehat{LG} + \widehat{FK} = \widehat{KM} + \widehat{GA} + \widehat{FK} = \widehat{FM} + \widehat{GA}$, одакле је $AM \perp FG$. Како је $AM \perp DE$, следи $DE \parallel FG$.



<u>*Друго решење.*</u> Нека праве FD и GE редом поново секу круг Γ у тачкама P и Q. Из сличности $\triangle DAP \sim \triangle DFB$ и $\triangle EAQ \sim \triangle EGC$ следи $AP = AD = AE = AQ$, што значи да су тачке P, D, E, Q концикличне. Сада је $\sphericalangle QGF = \sphericalangle QPF = \sphericalangle QPD = \sphericalangle QED$, тј. $FG \parallel DE$.

2. Индексе посматрамо по модулу 3. Из услова задатка имамо $a_{i+2}^2 = a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2}$, па сабирањем по $i = 1, \dots, n$ добијамо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_{i+1} a_{i+2} + 1) = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(a_i^2 + a_{i+3}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

уз једнакост само у случају да је $a_i = a_{i+3}$ за све i. Како нису сви чланови низа једнаки (у супротном бисмо имали $a_1 = a_1^2 + 1$ што је немогуће), следи да $3 \mid n$.

С друге стране, ако $3 \mid n$, низ $a_{3i-2} = a_{3i-1} = -1$, $a_{3i} = 2$ за $i = 0, \dots, \frac{n}{3} - 1$ задовољава услове.

<u>*Друго решење.*</u> Индексе посматрамо по модулу n.

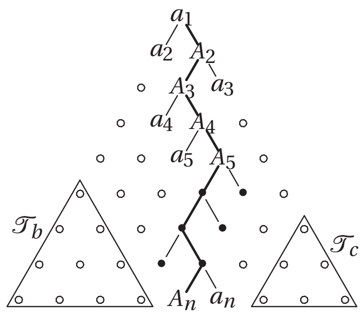
У низу не могу да постоје два узастопна ненегативна члана. Заиста, ако су нпр. $a_1, a_2 \geqslant 0$, онда су $a_3, a_4 \geqslant 1$ и надаље $a_4 < a_5 < a_6 < \dots$ што је немогуће.

Претпоставимо да постоје два узастопна негативна члана, нпр. $a_1, a_2 < 0$. Тада је $a_3 > 1$, па због претходног мора бити $a_4 < 0$ и $a_5 = a_3 a_4 + 1 < 1$. Ако је $a_5 \geqslant 0$, онда је $a_6 = a_4 a_5 + 1 \geqslant a_4 a_3 + 1 = a_5$, дакле $a_6 \geqslant 0$, што је немогуће. Дакле, $a_5 < 0$. Индукцијом следи $a_{3k} > 0 > a_{3k+1}, a_{3k+2}$ за све $k \in \mathbb{N}$, одакле $3 \mid n$.

Остаје случај када знак алтернира: $a_{2i+1} \geqslant 0 > a_{2i+2}$ за све i. Тада је $a_{2k+1} = a_{2k} a_{2k-1} + 1 \leqslant 1$, па је $a_{2k+2} = a_{2k} a_{2k+1} + 1 \geqslant a_{2k} + 1$ за све k, што је немогуће.

3. Одговор је *не*.

Означимо $n = 2018$. Нека је $a_1 = A_1$ број у горњој врсти, а за $i = 2, 3, \dots, n$, нека су a_i и A_i бројеви непосредно испод броја A_{i-1}, при чему је $A_i - a_i = A_{i-1}$. Како је $\frac{n(n+1)}{2} \geqslant A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geqslant 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, следи да је $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ пермутација бројева $1,2,\dots,n$ и $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$.



Посматрајмо два антипаскалова троугла: $\mathcal{T}_b$, одређен бројевима лево од пара (a_n, A_n), и $\mathcal{T}_c$, одређен бројевима десно од (a_n, A_n). Приметимо да у $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$ нема бројева мањих од $n+1$.

Нека се троуглови $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$ редом састоје од k и $n-2-k$ редова. На исти начин као у великом троуглу, означимо са $b_1 = B_1$ и $c_1 = C_1$ редом бројеве у горњим врстама троуглова $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$, а са b_i и B_i $(2 \leqslant i \leqslant k)$, односно c_j и C_j $(2 \leqslant j \leqslant n-2-k)$, редом парове бројева непосредно испод b_{i-1} и c_{j-1}, при чему је $B_i - b_i = B_{i-1}$ и $C_j - c_j = C_{j-1}$. Како су $b_i, c_j \geqslant n+1$, важи

$$n^2+n-3 \geqslant B_k + C_\ell = b_1 + \cdots + b_k + c_1 + \cdots + c_{n-2-k} \geqslant (n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-2) = \frac{3n^2-7n+2}{2},$$

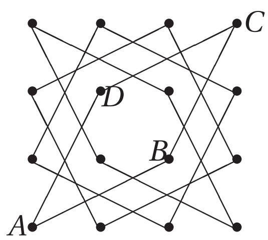
што није тачно за $n \geqslant 9$.

Напомена. Испоставља се да антипаскалов троугао састављен од свих бројева од 1 до $\frac{n(n+1)}{2}$ не постоји ни за једно $n \geqslant 6$. За $n=5$ јединствен пример (до на симетрију) је приказан на слици.

5
4 9
7 11 2
8 1 12 10
6 14 15 3 13

4. Одговор је $K = 100$.

Квадратна решетка 20×20 на којој се игра може се поделити на 25 подрешетки 4×4, од којих се свака може поделити у 4 циклуса облика $ABCDA$ у којима је $AB = BC = CD = DA = \sqrt{5}$. Бојан може да спречи Андријану да у истом циклусу постави више од једног црвеног каменчића - довољно је да на сваки њен потез одговори постављањем свог каменчића у супротну тачку истог циклуса (нпр. ако Андријана стави каменчић у тачку A, Бојан ставља свој у тачку C). Овако Андријана не може поставити више од 100 каменчића.



С друге стране, позиција (i,j) у којима су i и j исте парности има 200 и никоје две нису на растојању $\sqrt{5}$. Постављајући црвене каменчиће само на овакве позиције Андријана ће успети да постави бар 100 каменчића.

5. Користимо уобичајену ознаку $v_p(a) = k$ ако је $k \in \mathbb{Z}$ експонент простог броја p у канонском развоју рационалног броја a.

Из услова задатка следи да је $D_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1}$ цео број за све $n \geqslant N$. За фиксирано n и прост број p, означимо $v_p(a_1) = A$, $v_p(a_n) = B$ и $v_p(a_{n+1}) = C$. Разликујемо два случаја.

(i) $B < A$. Како је $v_p(\frac{a_n}{a_1}) = B - A < 0$, а D_n је цео број, следи $B - C = v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}) = B - A$ или $C - A = v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1}) = B - A$, па мора бити $C \in \{A, B\}$.

(ii) $B \geqslant A$. Ако је $C > B$ или $C < A$, следило би $v_p(D_n) = \min\{v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}), v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1})\} < 0$ што је немогуће. Према томе, $A \leqslant C \leqslant B$.

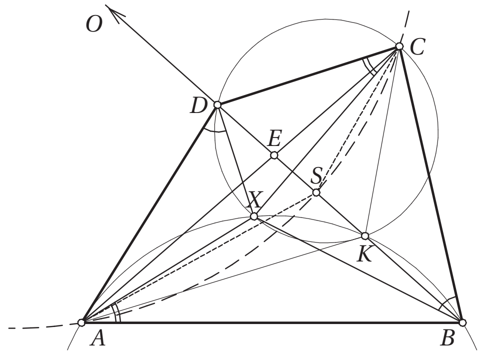
У оба случаја имамо $\min\{v_p(a_1), v_p(a_n)\} \leqslant v_p(a_{n+1}) \leqslant \max\{v_p(a_1), v_p(a_n)\}$. Како ово важи за сваки прост број p, следи да $d_n = \text{нзд}(a_1, a_n) \mid a_{n+1} \mid s_n = \text{нзс}(a_1, a_n)$. Одавде је

$$d_n \leqslant d_{n+1} \leqslant s_{n+1} \leqslant s_n \quad \text{за све } n \geqslant N.$$

Закључујемо да су низови d_n и s_n константни почев од неког члана, рецимо за $n \geqslant M$, па тада имамо $a_1 a_n = d_n s_n = d_M s_M = a_1 a_M$, тј. $a_n = a_M$.

6. Означимо са E пресек дијагонала AC и BD. Не умањујући општост, сматраћемо да је тачка X у троуглу ABE.

Нека се кругови ABX и CDX поново секу у тачки K. Из $\sphericalangle XKD = \sphericalangle XCD = \sphericalangle XAB = 180^\circ - \sphericalangle BKX$ следи да је K на правој BD. Шта више, пошто је X унутар кругова BDA и BDC (заиста, $\sphericalangle BXD = \sphericalangle BAD + \sphericalangle XBA + \sphericalangle ADX = \sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA > 180^\circ - \sphericalangle DCB$), тачка K лежи на дужи BE.



Симетрале углова BAD и BCD секу дуж BD у истој тачки S таквој да је $\frac{BS}{SD} = \frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CD}$, при чему тачке A, S и C леже на Аполонијевом кругу са центром O на правој BD. Ако је сада K' тачка на дужи BE таква да је $\sphericalangle K'CS = \sphericalangle SCE$, онда из $\sphericalangle ASK = 180^\circ - \sphericalangle ASO = 90^\circ + \sphericalangle ACS$ следи да је S центар уписаног круга троугла ACK. Одавде је $\sphericalangle AK'B + \sphericalangle CK'D = 180^\circ$.

Међутим, како је $\sphericalangle AKC = \sphericalangle AKX + \sphericalangle XKC = \sphericalangle ABX + 180^\circ - \sphericalangle CDX = \sphericalangle ABC + 180^\circ - \sphericalangle CDA = \sphericalangle ABC + \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle K'AB + \sphericalangle BCK' = \sphericalangle AK'C$, тачке K' и K се поклапају. Дакле, $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = \sphericalangle AKB + \sphericalangle CKD = 180^\circ$.

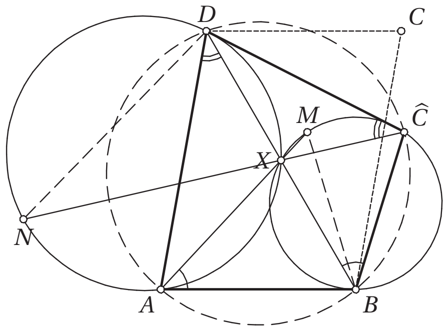
<u>*Друго решење.*</u> Углови у овом решењу су оријентисани, уз рачун по модулу 180°.

Нека је F пресек правих AB и CD, G пресек AD и BC, а O центар Аполонијевог круга k за тачке B и D који пролази кроз A и C. Из $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD$ и $\sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA$ следи да тачка X лежи на круговима ACF и BDG.

При инверзији у односу на круг k, тачка G се слика у тачку $\bar{G}$, A и C су фиксне, а B и D се сликају једна у другу. Следи да се и круг BDG слика у себе, а тачка $\bar{G}$ је на њему. Како је $\sphericalangle A\bar{G}C = \sphericalangle A\bar{G}O + \sphericalangle O\bar{G}C = \sphericalangle OAG + \sphericalangle GCO = \sphericalangle ABO + \sphericalangle ODC = \sphericalangle AFC$, тачка $\bar{G}$ такође лежи на кругу ACF. Сада имамо $\sphericalangle AXD = \sphericalangle AX\bar{G} + \sphericalangle \bar{G}XD = \sphericalangle AC\bar{G} + \sphericalangle \bar{G}BD = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OC\bar{G} + \sphericalangle \bar{G}BO = \sphericalangle ACO + \sphericalangle CGO + \sphericalangle OGD = \sphericalangle ACO + \sphericalangle CGA$. Слично се добија $\sphericalangle CXB = \sphericalangle CAO + \sphericalangle AGC$, одакле следи $\sphericalangle AXD + \sphericalangle CXB = 180^\circ$.

Треће решење. Доказаћемо еквивалентно тврђење: ако тачка X унутар конвексног четвороугла $ABCD$ задовољава $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD$, $\sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA$ и (без смањења општости) $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD < 180^\circ$, онда је $AB \cdot CD < BC \cdot DA$.

Посматрајмо тачку $\widehat{C}$ такву да обртна хомотетија слика $\triangle CXD$ у $\triangle BX\widehat{C}$. Тада је такође $\triangle CXB \sim \triangle DX\widehat{C}$, па је $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XB\widehat{C}$ и $\sphericalangle X\widehat{C}D = \sphericalangle XDA$. Из услова следи да је X унутар $\triangle A\widehat{C}D$. Ако права AX поново сече круг $BX\widehat{C}$ у тачки M, онда је $\triangle ABM \sim \triangle BX\widehat{C} \sim \triangle CXD$, па је $AM = \frac{AB \cdot CD}{CX}$. Слично, ако права $\widehat{C}X$ поново сече круг AXD у тачки N, важи $\triangle \widehat{C}DN \sim DXA$ и $\widehat{C}N = \frac{\widehat{C}D \cdot DA}{DX} = \frac{BC \cdot DA}{CX}$. Тврђење се своди на $AM < \widehat{C}N$.



Претпоставимо да су тачке A, $\widehat{C}$ и X фиксиране, а B и D променљиве тако да важи $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XB\widehat{C}$ и $\sphericalangle X\widehat{C}D = \sphericalangle XDA$. Дужина AM је највећа када је $\sphericalangle XB\widehat{C} = 180^\circ - \sphericalangle XM\widehat{C}$ највећи, тј. када је AB тангента на круг $BX\widehat{C}$. Слично, дужина $\widehat{C}N$ је најмања када је AD тангента на круг $DX\widehat{C}$. Посматрајмо само овај екстремални случај. Тада је $\triangle ABX \sim \triangle B\widehat{C}X$ и $\triangle \widehat{C}DX \sim \triangle DAX$, па је $AB\widehat{C}D$ хармонијски четвороугао са $\widehat{C}B < \widehat{C}D$, а X средиште дијагонале BD. Сада је $\sphericalangle A\widehat{C}M = \sphericalangle B\widehat{C}M - \sphericalangle B\widehat{C}A = \sphericalangle BXA - \sphericalangle BDA = \sphericalangle DAX = \sphericalangle \widehat{C}DB$ и одатле $\frac{AM}{A\widehat{C}} = \frac{\sin \sphericalangle A\widehat{C}M}{\sin \sphericalangle AM\widehat{C}} = \frac{\sin \sphericalangle \widehat{C}DB}{\sin \sphericalangle \widehat{C}BD} = \frac{\widehat{C}B}{\widehat{C}D}$. Аналогно је $\frac{\widehat{C}N}{A\widehat{C}} = \frac{\widehat{C}D}{\widehat{C}B}$. Добијамо $AM < A\widehat{C} < \widehat{C}N$, што смо и желели.