Понедељак, 9. јул 2018.

1. задатак. Нека је Γ описана кружница оштроуглог троугла ABC. Тачке D и E налазе се на дужима AB и AC, редом, тако да важи $AD = AE$. Симетрале дужи BD и CE секу краће лукове AB и AC кружнице Γ у тачкама F и G, редом. Доказати да су праве DE и FG паралелне (или једнаке).

2. задатак. Наћи све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које постоје реални бројеви $a_1, \ldots, a_{n+2}$, такви да је $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

за све $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. задатак. *Антипаскалов троугао* је таблица у облику једнакостраничног троугла која се састоји од бројева тако да, осим за бројеве у последњем реду, важи да је сваки број једнак апсолутној вредности разлике два броја која су непосредно испод њега. На пример, следећа таблица је антипаскалов троугао са четири реда, који се састоји од свих природних бројева од 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Да ли постоји антипаскалов троугао са 2018 редова који се састоји од свих природних бројева од 1 до $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Уторак, 10. јул 2018.

4. задатак. *Позиција* је свака тачка (x, y) у равни таква да су x и y природни бројеви не већи од 20.

На почетку, свака од 400 позиција је слободна. Андријана и Бојан играју игру у којој наизменично повлаче потезе, при чему Андријана игра прва. У сваком свом потезу Андријана поставља нови црвени каменчић на слободну позицију тако да је растојање између сваке две позиције на којима се налази црвени каменчић различито од $\sqrt{5}$. У сваком свом потезу Бојан поставља нови плави каменчић на неку слободну позицију. (Позиција на којој се налази плави каменчић може бити на било ком растојању од других позиција на којима се налази неки каменчић.) Игра се завршава када неко од њих не може повући потез.

Одредити највеће K тако да Андријана сигурно може поставити барем K црвених каменчића, без обзира на то како Бојан поставља плаве каменчиће.

5. задатак. Нека је $a_1, a_2, \ldots$ бесконачан низ природних бројева. Претпоставимо да постоји природан број $N > 1$ такав да је за све $n \geqslant N$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

цео број.

Доказати да постоји природан број M такав да је $a_m = a_{m+1}$ за све $m \geqslant M$.

6. задатак. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да је $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Тачка X налази се у унутрашњости четвороугла $ABCD$ тако да важи

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \quad \text{и} \quad \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

Доказати да је $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180^\circ$.

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.