# 3. Олимпијада метропола

## Математика · Први дан: 4.9.2018.

**1. задатак.** Решити у скупу реалних бројева систем једначина:

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = xyz - 1\,, \\ (x-2)(y-2)(z-2) = xyz - 2\,. \end{cases}$$

**2. задатак.** У конвексан четвороугао $ABCD$ је уписана кружница $\omega$. Нека је $PQ$ пречник кружнице $\omega$ који је нормалан на дијагоналу $AC$. Праве $BP$ и $DQ$ се секу у тачки $X$, а праве $BQ$ и $DP$ се секу у тачки $Y$. Доказати да тачке $X$ и $Y$ леже на правој $AC$.

**3. задатак.** Природан број $k$ је такав да је $p = 8k+5$ прост број. Цели бројеви $r_1, r_2, \ldots, r_{2k+1}$ су одабрани тако да бројеви $0, r_1^4, r_2^4, \ldots, r_{2k+1}^4$ дају међусобно различите остатке при дељењу са $p$. Доказати да је производ

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2k+1} \left(r_i^4 + r_j^4\right)$$

конгруентан са $(-1)^{k(k+1)/2}$ по модулу $p$.

(Два цела броја су конгруентна по модулу $p$ ако је њихова разлика дељива са $p$.)

# 3. Олимпијада метропола

## Математика · Други дан: 5.9.2018.

**4. задатак.** Нека су $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = 4k$ сви позитивни делиоци броја $4k$, где је $k$ природан број. Доказати да постоји $i \in \{1, \ldots, m\}$ такво да је $d_i - d_{i-1} = 2$.

**5. задатак.** Давид и Радан играју игру на табли $100 \times 100$.

Прво Давид означава сва поља табле бројевима од 1 до 10000, користећи сваки број тачно једном.

Потом Радан одабере поље у крајњој левој колони и на њега поставља жетон. Он треба да низом потеза стигне до крајње десне колоне, при чему у сваком потезу помера жетон на једно од суседних поља по страници или темену. За свако посећено поље (укључујући и полазно), он плаћа Давиду износ једнак броју којим је то поље означено.

Радан настоји да плати што мање, док Давид означава поља на такав начин да обезбеди што већу зараду. Колико ће Радан платити Давиду ако оба играча следе своје оптималне стратегије?

**6. задатак.** Уписана кружница троугла $ABC$ додирује странице $BC$ и $AC$ редом у тачкама $D$ и $E$. Претпоставимо да је $P$ тачка на краћем луку $DE$ уписане кружнице таква да је $\sphericalangle APE = \sphericalangle DPB$. Дужи $AP$ и $BP$ секу дуж $DE$ редом у тачкама $K$ и $L$. Доказати да је $2KL = DE$.