Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Нови Сад – 26. мај 2018.

Први дан

1. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да је бар један од бројева $2^{2^n}+1$ и $2018^{2^n}+1$ сложен. *(Бојан Башић)*

2. Нека је n задат природан број и нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви. Доказати:

$$x_1\left(1-x_1^2\right)+x_2\left(1-(x_1+x_2)^2\right)+\cdots+x_n\left(1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\right)<\frac{2}{3}.$$

(Никола Петровић)

3. Ана и Бобан играју следећу игру.

(1°) Најпре Бобан нацрта $\triangle ABC$ и бира унутар њега тачку P.

(2°) Затим Ана и Бобан наизменично, почев од Ане, бирају три различите пермутације σ_1, σ_2 и σ_3 скупа $\{A, B, C\}$.

(3°) Напослетку, Ана црта произвољан $\triangle V_1V_2V_3$.

За $i=1,2,3$, нека је ψ_i трансформација сличности у равни која слика тачке $\sigma_i(A)$, $\sigma_i(B)$ и $\sigma_i(C)$ редом у тачке V_i, V_{i+1} и X_i (узимамо $V_4=V_1$), при чему је $\triangle V_iV_{i+1}X_i$ у спољашњости $\triangle V_1V_2V_3$. Најзад, означимо $Q_i=\psi_i(P)$. Ана побеђује ако су $\triangle Q_1Q_2Q_3$ и $\triangle ABC$ слични (при неком редоследу темена), а у супротном побеђује Бобан. Ко има победничку стратегију? *(Бојан Башић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Нови Сад – 27. мај 2018.

Други дан

4. Назовимо *правим једнакокраким трапезом* једнакокраки трапез чији краци нису паралелни (дакле, паралелограми и правоугаоници нису прави једнакокраки трапези). Посматрамо поделу правоугаоника на n (могуће различитих) правих једнакокраких трапеза. За такву поделу кажемо да је *стриктна* ако унија никојих i трапеза у подели ($2 \leqslant i \leqslant n$) не чини прави једнакокраки трапез (другим речима, подела је стриктна ако се не може добити из неке поделе тог правоугаоника на мање од n правих једнакокраких трапеза, додатним дељењем неких трапеза из поделе на нове трапезе). Доказати да за све природне бројеве n ($n \geqslant 9$) постоји стриктна подела правоугаоника 2017×2018 на n правих једнакокраких трапеза. *(Бојан Башић)*

5. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) и нека је F ($F \not\equiv A$) тачка на описаној кружници тог троугла за коју важи $\sphericalangle AFH = 90^\circ$. Тачка K је централносиметрична слика тачке H у односу на тачку B, тачка P је таква да важи $\sphericalangle PHB = \sphericalangle PBC = 90^\circ$, а тачка Q је подножје нормале из тачке B на праву CP. Доказати да права HQ додирује кружницу описану око $\triangle FHK$. *(Душан Ђукић)*

6. За природан број n дефинишимо

$$c_n = \min_{z_1, z_2, \ldots, z_n \in \{-1,1\}^n} |z_1 \cdot 1^{2018} + z_2 \cdot 2^{2018} + z_3 \cdot 3^{2018} + \ldots + z_n \cdot n^{2018}|.$$

Да ли је низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен? *(Милош Милосављевић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. Претпоставимо супротно - да су бројеви $f_n = 2^{2^n}+1$ и $g_n = 2018^{2^n}+1$ прости за све $n \geqslant N$.

Посматрајмо поредак броја 2018 по модулу f_n, где је $n \geqslant N$. Тај поредак дели $f_n - 1 = 2^{2^n}$, тј. он је једнак 2^k за неко $k \in \mathbb{N}$. То значи да f_n дели $2018^{2^k} - 1 = (2018^{2^{k-1}} - 1)g_{k-1}$, али $f_n \nmid 2018^{2^{k-1}} - 1$, па мора бити $f_n \mid g_{k-1}$. Свакако је $g_{k-1} \neq f_n$, те је g_{k-1} сложен број, а одатле је $k-1 < N$. Дакле, f_n дели производ $g_0 g_1 g_2 \cdots g_{N-1}$ за све $n > N$, што је очигледно немогуће.

Напомена. Ни за један од низова (f_n) и (g_n) појединачно није познато да ли он садржи бесконачно много сложених бројева.

2. Леву страну дате неједнакости означавамо са L. Не умањујући општост, сматраћемо да је последњи сабирак у L ненегативан, тј. да је $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant 1$. Посматрајмо полулопту полупречника 1 и унутар ње низ уписаних ваљкова дуж осе, при чему i-ти ваљак има висину x_i и полупречник основе $\sqrt{1-(x_1+\cdots+x_i)^2}$. Збир запремина ових ваљкова је $\pi \cdot L$, а он је мањи од запремине полулопте која је $\frac{2}{3}\pi$. Одавде је $L < \frac{2}{3}$.

Друго решење. Означимо $y_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ за $1 \leqslant k \leqslant n$. Тражена неједнакост постаје

$$\begin{aligned} &y_1(1-y_1^2) + (y_2 - y_1)(1-y_2^2) + \cdots + (y_n - y_{n-1})(1-y_n^2) \\ &\quad = y_n - \left(y_1^3 - y_1 y_2^2 + y_2^3 - y_2 y_3^2 + \cdots - y_{n-1}y_n^2 + y_n^3\right) < \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

По неједнакости између средина имамо $y_i^3 + y_{i+1}^3 + y_{i+1}^3 \geqslant 3y_i y_{i+1}^2$. Сабирањем ових неједнакости за $i = 1, 2, \ldots, n-1$ добијамо

$$y_1^3 - y_1 y_2^2 + y_2^3 - y_2 y_3^2 + \cdots - y_{n-1}y_n^2 + y_n^3 \geqslant \frac{2}{3}y_1^3 + \frac{1}{3}y_n^3 > \frac{1}{3}y_n^3.$$

Према томе, довољно је доказати да важи $y_n - \frac{1}{3}y_n^3 \leqslant \frac{2}{3}$, што одмах следи из неједнакости између средина: $y_n^3 + 1 + 1 \geqslant 3y_n$.

Треће решење. Уз мало диференцијалног рачуна, максимум израза L за дато n се може експлицитно одредити. Максимум функције $L = L(y_1, \ldots, y_n)$ за $(y_1, \ldots, y_n) \in [0,1]^n$ се достиже у стационарној тачки $(y_1, \ldots, y_n)$ (допуните детаље - зашто не на граници коцке?). Тако добијамо систем једначина

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = y_{i+1}^2 - 3y_i^2 + 2y_{i-1}y_i = 0$$

за $1 \leqslant i \leqslant n$, где додефинишемо $y_0 = 0$ и $y_{n+1} = 1$. Овај систем се једноставно решава, а његово једино решење је

$$y_k = a_k a_{k+1} \cdots a_n, \quad \text{где је} \quad a_0 = 0 \quad \text{и} \quad a_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{3-2a_i}}\,. \tag{$*$}$$

Дакле, $\max L = L_n = L(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. У овој тачки је

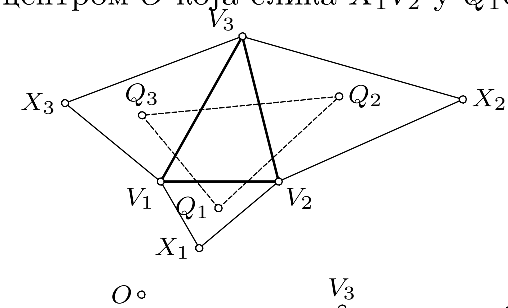
$$
\begin{aligned}
L_n =& \sum_{i=1}^{n}(1-a_i^2)a_i(a_{i+1}\cdots a_n)^3 = 2\sum_{i=1}^{n}(1-a_{i-1})(a_ia_{i+1}\cdots a_n)^3\\
=& 2a_n^3 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(a_i^3-a_i)(a_{i+1}\cdots a_n)^3 = 2a_n^3 - 4\sum_{i=1}^{n-1}(1-a_{i-1})(a_ia_{i+1}\cdots a_n)^3\\
=& 2a_n^3 + 4(1-a_{n-1})a_n^3 - 2L_n = 2a_n - 2L_n,
\end{aligned}
$$

одакле коначно добијамо $L_n = \dfrac{2}{3}a_n$.

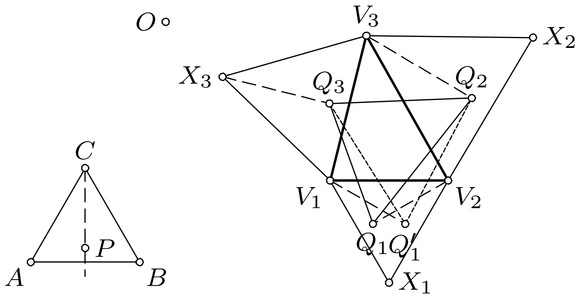
3. Бобан има победничку стратегију. Следеће опште тврђење користићемо у случају да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

Лема. У спољашњости троугла $V_1V_2V_3$ конструисани су међусобно слични троуглови $V_1V_2X_1$, $V_3X_2V_2$ и $X_3V_3V_1$ (у датом редоследу темена). При овим сличностима, тачки Q_1 унутар $\triangle V_1V_2X_1$ одговарају тачке Q_2 у $\triangle V_3X_2V_2$ и Q_3 у $\triangle X_3V_3V_1$. Тада је $\triangle Q_1Q_2Q_3 \sim \triangle ABC$.

Доказ. Нека је O центар обртне хомотетије која слика $\triangle V_1V_2X_1$ у $\triangle V_3X_2V_2$. Ова хомотетија слика Q_1 у Q_2, па је $\triangle OX_1Q_1 \sim \triangle OV_2Q_2$, одакле следи да постоји обртна хомотетија φ са центром O која слика X_1V_2 у Q_1Q_2. Слично, $\triangle OX_1Q_1 \sim \triangle OV_1Q_3$, па постоји обртна хомотетија φ' са центром O која слика X_1V_1 у Q_1Q_3. Како је $\varphi(X_1) = \varphi'(X_1) = Q_1$, следи да је $\varphi' = \varphi$, па φ слика $\triangle X_1V_2V_1$ у $\triangle Q_1Q_2Q_3$, одакле следи тврђење. $\square$



На почетку игре, Бобан ће нацртати једнакостраничан $\triangle ABC$ и у њему одабрати тачку P на симетрали странице AB различиту од центра троугла. Тако ће троуглови $V_1V_2X_1$, $V_2V_3X_2$ и $V_3V_1X_3$ бити једнакостранични.



Након што Ана одабере своју пермутацију σ_1, Бобан бира пермутацију σ_2 која се од σ_1 добија заменом места слова A и B. Сада је $\triangle V_2V_3Q_2 \sim \triangle V_1V_2Q_1$. За тачку Q_3 Ана има следеће могућности:

(1°) $\triangle V_3V_1Q_3 \sim \triangle V_1V_2Q_1$ би важило само за $\sigma_3 \in \{\sigma_1, \sigma_2\}$, што је забрањено.

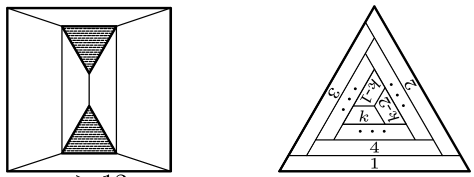
(2°) $\triangle V_1X_3Q_3 \sim \triangle V_1V_2Q_1$. Ако је Q_1' ($\neq Q_1$) тачка унутар $\triangle V_1V_2X_1$ таква да је $\triangle V_1V_2Q_1' \sim \triangle X_3V_3Q_3$, на основу Леме је $\triangle Q_1'Q_2Q_3$ једнакостраничан. Међутим, онда $\triangle Q_1Q_2Q_3$ то није.

(3°) $\triangle X_3V_3Q_3 \sim \triangle V_1V_2Q_1$. Ако је Q_2' ($\neq Q_2$) тачка унутар $\triangle V_2V_3X_2$ таква да је $\triangle V_3X_2Q_2' \sim V_1V_2Q_1$, на основу Леме је $\triangle Q_1Q_2'Q_3$ једнакостраничан. Међутим, онда $\triangle Q_1Q_2Q_3$ то није.

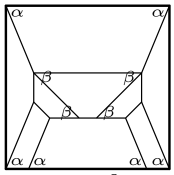
Дакле, Ана губи јер не може да постигне да $\triangle Q_1Q_2Q_3$ буде једнакостраничан.

4. На слици је приказана подела произвољног правоугаоника на 6 правих једнакокраких трапеза и два једнакостранична троугла. Притом се сваки једнакостраничан троугао може стриктно поделити на k трапеза, за свако $k \geqslant 3$. На овај начин може се добити тражена подела на n трапеза за свако $n \geqslant 12$.

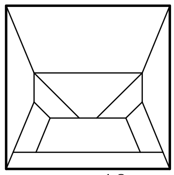
Тражене поделе за $9 \leqslant n \leqslant 11$ су дате на слици, где је $\alpha = 67{,}5°$ и $\beta = 45°$.



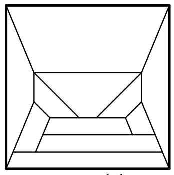
$n \geqslant 12$



$n = 9$

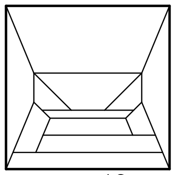


$n = 10$

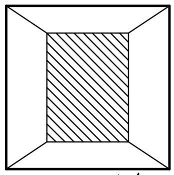


$n = 11$

<u>*Друго решење.*</u> Поделе за $n = 9$, 10 и 11 из првог решења могу се даље прилагодити, дајући строгу поделу за $n = 12$. Сада тврђење задатка следи индукцијом $n \to n + 4$.

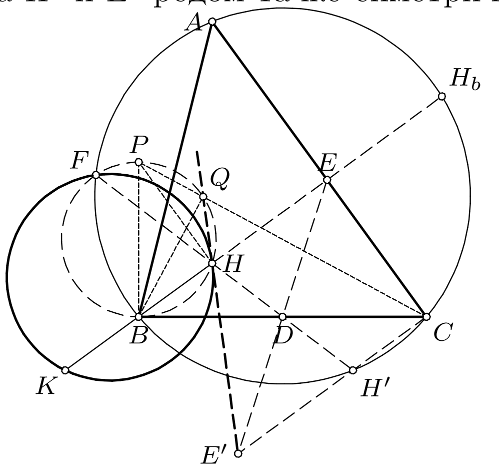


$n = 12$



$n \to n{+}4$

5. Нека је E подножје висине из темена B, а H' и E' редом тачке симетричне тачкама H и E у односу на средиште D странице BC. Пошто је $\sphericalangle AFH' = 90°$, тачке H', D, H и F су колинеарне. Означимо са H_b тачку симетричну тачки H у односу на AC. Тачке H' и H_b леже на описаном кругу Ω троугла ABC јер важи $\sphericalangle AH_bC = \sphericalangle AHC = 180° - \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BH'C = \sphericalangle BHC = 180° - \sphericalangle BAC$.



Из $FH \cdot HH' = BH \cdot HH_b$ добијамо $\triangle FHB \sim \triangle H_bHH'$. Одавде су троуглови FHB и EHD слични, а при овој сличности, тачки K одговара тачка H'. Према томе, $\triangle FHK \sim \triangle EHH'$, па пошто је $EHE'H'$ паралелограм, важи $\sphericalangle KFH = \sphericalangle HEH' = \sphericalangle KHE'$, што значи да права HE' додирује круг FHK.

Најзад, четвороуглови $BE'CQ$ и $BPQH$ су тетивни, па је $\sphericalangle BQE' = \sphericalangle BCE' = \sphericalangle CBH = \sphericalangle BPH = \sphericalangle BQH$, дакле тачке Q, H и E' су колинеарне, па је доказ завршен.

<u>*Друго решење.*</u> Тачке H и Q леже на кругу γ над пречником BP. Такође, $\sphericalangle BFH = \sphericalangle BFA - 90° = 90° - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CBE = \sphericalangle BPH$, па и тачка F припада кругу γ. Следи да је $\sphericalangle FBK = 180° - \sphericalangle HBF = \sphericalangle FQH$.

Нека је D средиште странице BC, а H' тачка симетрична тачки H у односу на D. Пошто је D центар описаног круга $\triangle BQC$, имамо $DQ^2 = DB^2 = DB \cdot DC = DH' \cdot DF = DH \cdot DF$, одакле следи $\triangle DHQ \sim \triangle DQF$ и $\triangle DHB \sim \triangle DBF$. Сада је $\frac{FQ}{QH} = \frac{FD}{QD} = \frac{FD}{BD} = \frac{FB}{BH} = \frac{FB}{BK}$. Закључујемо да су троуглови FQH и FBK слични, па је $\sphericalangle FKH = \sphericalangle FKB = \sphericalangle FHQ$, што значи да HQ додирује круг FHK.

6. Доказаћемо да за сваки природан број n важи $c_{n+2^{2019}} \leqslant c_n$, одакле ће одмах следити да је низ (c_n) ограничен.

<u>*Лема.*</u> Дефинишимо $\epsilon_0 = 1$ и, за $k \in \mathbb{N}_0$ и $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, $\epsilon_n = -\epsilon_{n-2^k}$. Тада за сваки полином $P(x)$ степена највише d важи

$$\sum_{i=0}^{2^{d+1}-1} \epsilon_i \cdot P(x+i) = 0.$$

<u>*Доказ.*</u> Тврђење доказујемо индукцијом по d. База $d = 0$ је тривијална: $P(x)$ је константа, $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = -1$ и $P(x+1) - P(x) = 0$.

Нека је $P(x)$ полином степена $d > 0$. Полином $Q(x) = P(x+2^d) - P(x)$ има степен $d-1$, па како је $\epsilon_{i+2^d} = -\epsilon_i$ за $0 \leqslant i < 2^d$, имамо

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2^{d+1}-1} \epsilon_i \cdot P(x+i) &= \sum_{i=0}^{2^d-1} \epsilon_i \cdot P(x+i) + \sum_{i=0}^{2^d-1} \cdot P(x+i+2^d) \\ &= \sum_{i=0}^{2^d-1} \epsilon_i [P(x+i) - P(x+i+2^d)] = -\sum_{i=0}^{2^d-1} \epsilon_i Q(x) = 0.\end{aligned}$$

по индуктивној претпоставци, што завршава индукцију. $\square$

На основу леме је $c_{n+2^{2019}} \leqslant c_n + \sum_{i=0}^{2^{2019}-1} \epsilon_i (n+i+1)^{2018} = c_n$.

<u>*Друго решење.*</u> Означимо $m = 2018$. Доказаћемо јача тврђења:

- Нека је $x = \left\lceil \frac{1}{\sqrt[m]{2}-1} \right\rceil$. Тада је
$$\max_{n \in \mathbb{N}} c_n = c_x = x^m - (x-1)^m - \cdots - 2^m - 1^m.$$
У нашем случају је $x = 2911$.
- За све довољно велике бројеве n важи $c_n \in \{0, 1\}$.

(а) За $n < x$ имамо $1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m < n^m$ (ово следи из неједнакости $i^m > 2(i-1)^m$ за $i < x$), па је $c_n = n^m - (n-1)^m - \cdots - 1^m$. Сада је $c_n - c_{n-1} = n^m - 2(n-1)^m > 0$, тј. $c_1 < c_2 < \cdots < c_x$.

Фиксирајмо $n > x$. Дефинишимо $b_{m+1} = 0$ и $b_i = |i^m - b_{i+1}|$ за $i = m, m-1, \ldots$. Једноставном индукцијом ($i \to i-1$) се показује да за $i \geqslant x$ важи $b_i < i^m$, а за $i < x$ важи $b_i < x^m - (x-1)^m - \cdots - i^m$. Следи да је $c_n \leqslant b_1 < c_x$.

(б) Означимо $S_n = \{\sum_{i=1}^n z_i \cdot i^m \mid z_i \in \{-1, 1\}\}$.

Као у Леми из првог решења, доказује се да важи

$$\sum_{i=0}^{2^m-1} \epsilon_i \cdot (x+i)^m = (-1)^m \cdot N, \quad \text{где је} \quad N = 2^{\frac{m(m-1)}{2}} m!,$$

а низ (ϵ_i) је уведен у Леми. Следи да, за свако $x \in S_n$, бројеви x и $x \pm 2N$ припадају скупу $S_{n+2^{m+1}}$. Индукцијом следи да

$$x + 2iN \in S_{n+2^{m+1}j} \quad \text{кад год је} \quad x \in S_n \quad \text{и} \quad |i| \leqslant j.$$

Тврдимо да, за свако $n \geqslant 2N^2$, у скупу S_n постоји елемент конгруентан са 0 или 1 по модулу $2N$. Заиста, ако је $1^m + 2^m + \cdots + n^m \equiv k \pmod{2N}$, променом знака у овој суми испред сабирака $(1+2iN)^m$ за $i=0,1,\dots,[\frac{k}{2}]-1$ добијамо елемент $x_n \in S_n$ такав да је $x_n \equiv k-2[\frac{k}{2}] \pmod{2N}$.

Означимо $y_n = [\frac{x_n}{2N}]$ и $Y = \max\{|y_n| \mid 2N^2 \leqslant n < 2N^2+2^{m+1}\}$. На основу претходног, за $2N^2 \leqslant n < 2N^2+2^{m+1}$, број $z_n = x_n - 2N \cdot y_n$ ($z_n \in \{0,1\}$) припада скупу $S_{n+2^{m+1}j}$ кад год је $j \geqslant Y$. Према томе, за $n > 2N^2+2^{m+1}Y$, скуп S_n садржи нулу или јединицу, те је $c_n \in \{0,1\}$. Заправо, провером парности видимо да је

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n \equiv 0,3 \pmod 4, \\ 1, & \text{за } n \equiv 1,2 \pmod 4. \end{cases}$$

Напомена. Низ $(\frac{1+\epsilon_n}{2})$ је познат као *Ту-Морсов низ (A. Thue, M. Morse)*.