Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

26. мај 2018.

Први дан

1. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да је бар један од бројева $2^{2^n}+1$ и $2018^{2^n}+1$ сложен.

2. Нека је n задат природан број и нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви. Доказати:

$$x_1(1-x_1^2)+x_2(1-(x_1+x_2)^2)+\cdots+x_n(1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2)<\frac{2}{3}.$$

3. Ана и Боба играју следећу игру.

1° Најпре Боба нацрта $\triangle ABC$ и бира унутар њега тачку P.

2° Затим Ана и Боба наизменично, почев од Ане, бирају три различите пермутације σ_1, σ_2 и σ_3 скупа $\{A, B, C\}$.

3° Напослетку, Ана црта произвољан $\triangle V_1V_2V_3$.

За $i = 1, 2, 3$, нека је ψ_i трансформација сличности у равни која слика тачке $\sigma_i(A)$, $\sigma_i(B)$ и $\sigma_i(C)$ редом у тачке V_i, V_{i+1} и X_i (узимамо $V_4 = V_1$), при чему је $\triangle V_iV_{i+1}X_i$ у спољашњости $\triangle V_1V_2V_3$. Најзад, означимо $Q_i = \psi_i(P)$. Ана побеђује ако су $\triangle Q_1Q_2Q_3$ и $\triangle ABC$ слични (при неком редоследу темена), а у супротном побеђује Боба. Ко има победничку стратегију?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

27. мај 2018.

Други дан

4. Назовимо *правим једнакокраким трапезом* једнакокраки трапез чији краци нису паралелни (дакле, паралелограми и правоугаоници нису прави једнакокраки трапези). Посматрамо поделу правоугаоника на n (могуће различитих) правих једнакокраких трапеза. За такву поделу кажемо да је *стриктна* ако унија никојих i трапеза у подели, за $2 \leqslant i \leqslant n$, не чини прави једнакокраки трапез (другим речима, подела је стриктна ако се не може добити од неке поделе тог правоугаоника на мање од n правих једнакокраких трапеза, додатним дељењем неких трапеза из поделе на нове трапезе). Доказати да за све природне бројеве n, $n \geqslant 9$, постоји стриктна подела правоугаоника 2017×2018 на n правих једнакокраких трапеза.

5. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, $AB \neq AC$, и нека је F, $F \not\equiv A$, тачка на описаној кружници тог троугла за коју важи $\measuredangle AFH = 90^\circ$. Тачка K је централносиметрична слика тачке H у односу на тачку B, тачка P је таква да важи $\measuredangle PHB = \measuredangle PBC = 90^\circ$, а тачка Q је подножје нормале из тачке B на праву CP. Доказати да права HQ додирује кружницу описану око $\triangle FHK$.

6. За природан број n, дефинишимо

$$c_n = \min_{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \{-1,1\}^n} |z_1 \cdot 1^{2018} + z_2 \cdot 2^{2018} + z_3 \cdot 3^{2018} + \ldots + z_n \cdot n^{2018}|.$$

Да ли је низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.