EGMO 2018
Florence | April 9th-15th

sreda, 11.4.2018.

Zadatak 1. Neka je ABC trougao u kome važi $CA = CB$ i $\angle ACB = 120^\circ$, i neka je M središte stranice AB. Neka je P tačka na kružnici opisanoj oko trougla ABC, i neka je Q tačka na duži CP tako da važi $QP = 2QC$. Dato je da prava kroz tačku P koja je normalna na pravu AB seče pravu MQ u jedinstvenoj tački N.

Dokazati da postoji kružnica takva da joj tačka N pripada za sve moguće pozicije tačke P.

Zadatak 2. Dat je skup

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots\right\}.$$

(a) Dokazati da se svaki prirodan broj $x \geq 2$ može napisati kao proizvod jednog ili više elemenata skupa A, koji ne moraju biti različiti.

(b) Za svaki prirodan broj $x \geq 2$, neka je $f(x)$ najmanji prirodan broj takav da se x može napisati kao prozivod $f(x)$ elemenata skupa A, koji ne moraju biti različiti.

Dokazati da postoji beskonačno mnogo parova (x, y) prirodnih brojeva za koje važi $x \geq 2$, $y \geq 2$, i

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Parovi (x_1, y_1) i (x_2, y_2) su različiti ako i samo ako $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$).

Zadatak 3. Označimo n takmičarki EGMO-a sa $C_1, \dots, C_n$. Posle takmičenja, one staju u red ispred restorana u skladu sa sledećim pravilima.

- Komisija bira početni redosled takmičarki u redu.
- Svakog minuta Komisija bira prirodan broj i, tako da $1 \leq i \leq n$.
  - Ako se ispred takmičarke C_i nalazi bar i drugih takmičarki, ona plaća jedan evro Komisiji i pomera se prema početku reda za tačno i pozicija.
  - Ako se ispred takmičarke C_i nalazi manje od i drugih takmičarki, restoran se otvara i proces se završava.

(a) Dokazati da ovaj proces ne može trajati beskonačno, bez obzira na izbore Komisije.

(b) Odrediti za svako n najveći broj evra koje Komisija može da prikupi prefrigano birajući početni raspored i izabrane brojeve.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.

četvrtak, 12.4.2018.

Zadatak 4. *Domina* je pločica dimenzija 1×2 ili 2×1.

Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Domine su postavljene na tablu dimenzija $n \times n$ tako da svaka domina pokriva tačno dva polja table, i domine se ne preklapaju.

Vrednost vrste, odnosno kolone, je broj domina koje pokrivaju bar jedno polje u toj vrsti, odnosno koloni. Konfiguraciju nazivamo *balansiranom* ako postoji $k \geq 1$ tako da svaka vrsta i svaka kolona ima vrednost k.

Dokazati da balansirana konfiguracija postoji za svako $n \geq 3$, i naći najmanji broj domina potrebnih za takvu konfiguraciju.

Zadatak 5. Neka je Γ kružnica opisana oko trougla ABC. Kružnica Ω tangira duž AB i tangira kružnicu Γ u tački koja je sa iste strane prave AB kao i C. Simetrala ugla $\angle BCA$ seče Ω u dve različite tačke P i Q.

Dokazati $\angle ABP = \angle QBC$.

Zadatak 6.

(a) Dokazati da za svaki realan broj t za koji važi $0 < t < \frac{1}{2}$ postoji prirodan broj n koji zadovoljava sledeće: Za svaki skup S koji sadrži n prirodnih brojeva postoje dva različita elementa x i y skupa S, i *nenegativan* ceo broj m (tj. $m \geq 0$), tako da

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Utvrditi da li za svaki realan broj t za koji važi $0 < t < \frac{1}{2}$ postoji beskonačan skup S koji sadrži prirodne brojeve tako da

$$|x - my| > ty$$

važi za svaki par različitih elemenata x i y skupa S i svaki *prirodan* broj m (tj. $m > 0$).

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.