13^{th} International Zhautykov Olympiad in Mathematics

Almaty , January 12-18, 2017

Први дан – 14.1.2017.

1. Неједнакокраки оштроугли троугао ABC уписан је у круг ω. Нека је H ортоцентар овог троугла, а M средиште странице AB. На луку AB круга ω који не садржи тачку C дате су тачке P и Q такве да је $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ < \sphericalangle ACQ$. Нека су R и S редом подножја нормала из тачке H на праве CQ и CP. Доказати да тачке P, Q, R и S леже на неком кругу са центром M.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве x и y важи

$$(x + y^2)f(yf(x)) = xyf(y^2 + f(x)).$$

3. Правоугаоник на јединичној квадратној мрежи подељен је на домине (правоугаонике који се састоје од два јединична квадрата). Доказати да се сви чворови решетке унутар правоугаоника и на његовој граници могу обојити у три боје тако да је испуњен услов: за свака два чвора на растојању 1, ти чворови су различитих боја ако дуж која их спаја лежи на граници једне од домина, а истих боја у супротном.

Други дан – 15.1.2017.

4. Првих k чланова $a_1, a_2, \ldots, a_n$ низа (a_n) су различити природни бројеви, а за $n > k$, број a_n је најмањи природан број који није представљив у облику збира неколико (бар једног) од бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Доказати да за све довољно велике бројеве n важи $a_n = 2a_{n-1}$.

5. За природан број k, са $C(k)$ означавамо збир свих различитих простих делилаца броја k. На пример, $C(1) = 0$, $C(2) = 2$ и $C(45) = 8$. Наћи све природне бројеве n за које важи $C(2^n + 1) = C(n)$.

6. У простору су дати правилан тетраедар $ABCD$ и произвољне тачке M и N. Доказати неједнакост

$$MA \cdot NA + MB \cdot NB + MC \cdot NC \geqslant MD \cdot ND.$$

(Тетраедар је правилан ако су свих шест његових ивица једнаке.)

Време за рад: 270 минута сваког дана.
Сваки задатак вреди 7 поена.