Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. март 2017.

Први дан

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c=1$. Доказати:

$$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}\leqslant\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}.$$

(Никола Петровић)

2. Дат је конвексан тетиван четвороугао $ABCD$. Нека се праве AD и BC секу у тачки E. На страницама AD и BC су одабране тачке M и N, редом, такве да важи $AM:MD=BN:NC$. Кружнице описане око троугла EMN и четвороугла $ABCD$ секу се у тачкама X и Y. Доказати да се праве AB, CD и XY секу у једној тачки или су све паралелне. *(Душан Ђукић)*

3. У врсти се налази $2n-1$ сијалица. У почетку је средња (n-та) упаљена, а све остале су угашене. У једном кораку је дозвољено одабрати две несуседне угашене сијалице између којих су све сијалице упаљене, и променити стање тим двема сијалицама, као и свим сијалицама између њих (на пример, од конфигурације $\bullet\circ\circ\circ\bullet$ добија се $\circ\bullet\bullet\bullet\circ$). Колико највише корака је могуће извршити? *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2017.

Други дан

4. Нека је a природан број такав да за сваки природан број n број n^2a-1 има бар један делилац већи од 1 који даје остатак 1 при дељењу са n. Доказати да је a потпун квадрат. *(Душан Ђукић)*

5. Одредити колико се највише краљица може поставити на таблу 2017×2017, при чему свака краљица сме да напада највише једну од преосталих. *(Бојан Башић и комисија)*

6. Нека је k кружница описана око $\triangle ABC$, а k_a приписана кружница наспрам темена A. Две заједничке тангенте кружница k и k_a секу праву BC у тачкама P и Q. Доказати да важи $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAC$. *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. Квадрирањем обе стране и коришћењем једнакости $1-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)$ неједнакост из задатка се своди на

$$\begin{aligned} L = {} & 2a^2b+2b^2c+2c^2a+\\ & 2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}+2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}+2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}\\ \leqslant {} & D=4(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

По AM-ГМ неједнакости имамо $2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}\leqslant ab(2b+2c+2)$ и аналогно $2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}\leqslant bc(2c+2a+2)$ и $2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}\leqslant ca(2a+2b+2)$, па сабирањем добијамо

$$\begin{aligned} L\leqslant {} & 2(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc)+2(ab+bc+ca)=\\ & 2(a+b+c+1)(ab+bc+ca)=4(ab+bc+ca)=D. \end{aligned}$$

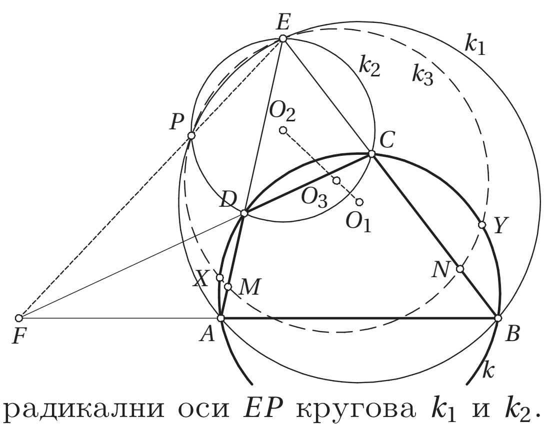
<u>*Друго решење.*</u> Функција $f(x)=\sqrt{x}$ је конкавна јер је $f'(x)=2/\sqrt{x}$ опадајућа функција. Применом Јенсенове неједнакости са тежинама a, b и c добијамо

$$\begin{aligned} a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1} & \leqslant \sqrt{a(2b+1)+b(2c+1)+c(2a+1)}\\ & =\sqrt{1+2(ab+bc+ca)}=\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}. \end{aligned}$$

<u>*Напомена.*</u> Ако се допусти да неки од бројева a,b,c буде нула, једнакост се достиже у случајевима $a=b=c=\frac{1}{3}$ и $(a,b,c)=(1,0,0)$ са пермутацијама.

2. У случају $AB\parallel CD$ тврђење је тривијално: тачке X и Y су симетричне у односу на симетралу дужи AB и CD и важи $AB\parallel XY\parallel CD$.

Нека је $AB\nparallel CD$. Тада описани кругови k_1 и k_2 троуглова EAB и ECD имају другу пресечну тачку $P\neq E$. Из $\sphericalangle PAD=\sphericalangle PBE$ и $\sphericalangle PDA=180^\circ-\sphericalangle PDE=180^\circ-\sphericalangle PCE=\sphericalangle PCB$ следи да су троуглови PAD и PBC слични. При овој сличности тачки M у $\triangle PAD$ одговара тачка N у $\triangle PBC$, па је $\sphericalangle PME=\sphericalangle PNE$. Закључујемо да тачке E, P, M и N леже на истом кругу k_3.



Како тачка F има једнаку потенцију $FA\cdot FB=FC\cdot FD$ у односу на кругове k_1, k_2 и круг k описан око $ABCD$, она лежи на радикални оси EP кругова k_1 и k_2. Сада је још $FA\cdot FB=FE\cdot FP$, па F такође припада радикалној оси кругова k_1 и k_3, а то је права XY.

<u>*Друго решење.*</u> Нека су k, k_1, k_2 и k_3 редом описани кругови четвороугла $ABCD$ и $\triangle EAB$, $\triangle ECD$ и $\triangle EMN$. Треба показати да се радикални центри тројки кругова (k,k_1,k_2) и (k,k_1,k_3) поклапају (можда у бесконачној тачки). Довољно је доказати да кругови k_1,k_2,k_3 имају заједничку радикалну осу, тј. да су њихови центри O_1,O_2,O_3 редом колинеарни.

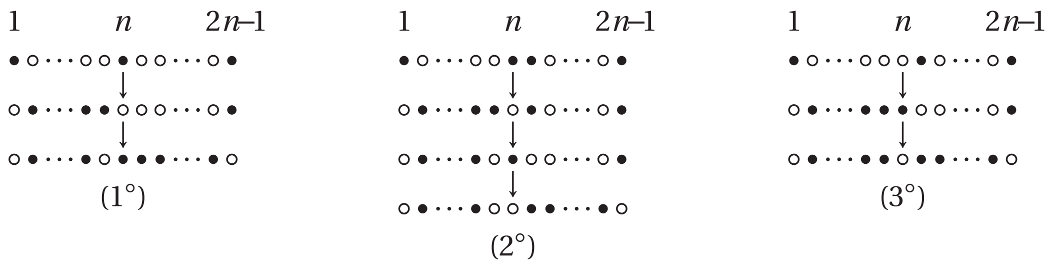
За $i = 1,2,3$, означимо са E_i тачку симетричну тачки E у односу на O_i. Доказаћемо да се тачка E_3 поклапа са тачком E_3' на дужи E_1E_2 таквом да је $E_1E_3' : E_3'E_2 = AM : MD$. Заиста, пошто је $E_1A \perp AD$ и $E_2D \perp AD$, из Талесове теореме следи $E_3'M \perp AD$; аналогно је $E_3'N \perp BC$, па је $E_3' \equiv E_3$.

3. Одговор је $\left[\frac{2^{n+1}-5}{3}\right]$.

Придружимо i-тој сијалици број $2^{|i-n|}$ и дефинишимо *вредност* конфигурације као збир бројева на упаљеним сијалицама. Вредност полазне конфигурације је 1, а при сваком кораку она се повећава за природан умножак броја 3. Корак повећава вредност за тачно 3 ако n-та сијалица мења стање; овакав корак зовемо *добрим*.

Пошто вредност не може да премаши $2^{n+1}-4$ (јер се не могу упалити све сијалице), није могуће извршити више од $[\frac{2^{n+1}-5}{3}]$ корака. Овај број се може достићи: довољно је показати да је могуће извршити бар $\frac{2^{n+1}-7}{3}$ корака.

Доказаћемо индукцијом по n да, почевши од конфигурације вредности највише 3, можемо да низом добрих корака добијемо конфигурацију вредности бар $2^{n+1}-6$. Ово се директно проверава за $n \leqslant 2$. Нека је $n \geqslant 3$. По индуктивној претпоставци за $n-1$, могуће је доћи до конфигурације вредности бар 2^n-6 са првом и последњом сијалицом угашеном. У таквој конфигурацији, осим прве и последње сијалице, могу бити угашене (1°) само n-та, (2°) само n-та и једна од њој суседних, или (3°) само једна од две суседне. У сваком од ова три случаја, у највише три добра корака постижемо да прва и последња сијалица буду упаљене и да вредност остатка конфигурације (без ове две сијалице) буде највише 3.



Поновна примена индуктивне претпоставке за $n-1$ завршава индукцију.

4. Нека је $n^2a-1 = (nx_n+1)d_n$ $(x_n, d_n \in \mathbb{N})$. Тада је $d_n \equiv -1 \pmod{n}$, па је

$$n^2a-1 = (nx_n+1)(ny_n-1) \quad \text{за неке } x_n, y_n \in \mathbb{N},$$

што се своди на $na - nx_ny_n = y_n - x_n > -x_ny_n$. Одавде добијамо $x_n \leqslant x_ny_n < \frac{n}{n-1}a \leqslant 2a$. Следи да у низу $x_1, x_2, \dots$ постоји члан који се јавља бесконачно много пута. Означимо тај члан са X. Тада $nX+1 \mid n^2a-1$ и одатле

$$nX+1 \mid X^2(n^2a-1) - a(n^2x^2-1) = a - X^2$$

за бесконачно много бројева n. Ово је могуће само за $a - X^2 = 0$, тј. $X^2 = a$.

Друго решење. Као и у првом решењу, нека је $n^2a-1 = (nx_n+1)(ny_n-1)$, тј. $y_n - x_n = n(a - x_ny_n) = nd_n$. Разликујемо три случаја.

(1°) Ако је $d_n > 0$, онда је $a = d_n + x_n(x_n + nd_n) > nd_n x_n$, што је немогуће за $n \geqslant a$.

(2°) Ако је $d_n < 0$, онда је $a = d_n + y_n(y_n - nd_n) = y_n^2 - d_n(ny_n - 1) > ny_n - 1$, што је немогуће за $n \geqslant a + 1$.

(3°) Ако је $d_n = 0$, онда је $a = x_n^2$. потпун квадрат.

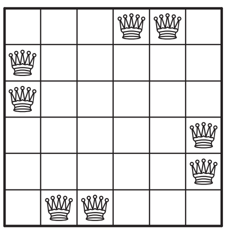
5. Означимо $n = 2017$. Претпоставимо да је постављено $m > n$ краљица. Ни у једној врсти нема више од две краљице, па се у бар $m - n$ врста налазе по две краљице, тако да има највише $m - 2(m - n) = 2n - m$ краљица које су саме у својој врсти. Слично, највише $2n - m$ краљица су саме у својој колони. С друге стране, свака краљица је сама у својој врсти или у својој колони, па је $m \leqslant 2(2n - m)$, одакле је $m \leqslant [\frac{4n}{3}] = 2689$.

На слици А је приказано постављање 8 краљица на таблу 6×6 у складу са захтевом задатка. Пре конструкције примера на табли 2017×2017 размотрићемо следећи распоред краљица:

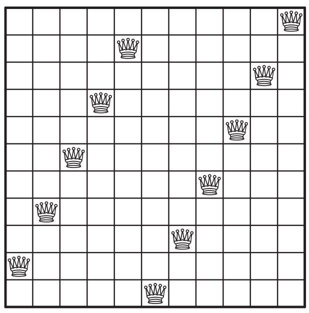
- На таблу 335×335 могуће је поставити 335 краљица које се међусобно не нападају *чак ни ако се дијагонале продуже по модулу* 335. Заиста, довољно је поставити краљице на сва поља (x, y), $1 \leqslant x, y \leqslant 335$, за која је $y \equiv 2x \pmod{335}$, као на слици Б. Заиста, тада су сви збирови $x + y$ међусобно различити по модулу 335, све разлике $x - y$ такође, па никоје две краљице нису у истој врсти, колони или дијагонали.

Поделимо таблу 2017×2017 на правоугаонике и квадрате страница 335, 6 и 1, као на слици В. Квадрате обележене са Б и А попунићемо редом као на сликама Б и А, а у горње десно поље табле поставићемо још једну краљицу. Овако смо укупно поставили $8 \cdot 335 + 8 + 1 = 2689$ краљица. Лако се проверава да овакво постављање задовољава услове задатка.

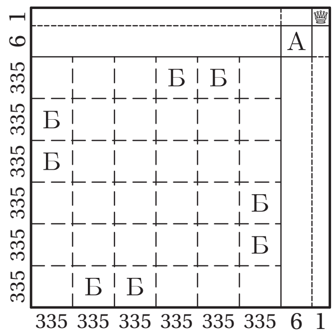
А - табла 6×6



Б - табла 335×335



В - табла 2017×2017



<u>*Напомена.*</u> Табла $n \times n$ чије су дијагонале продужене по модулу n зове се *торусна табла.* На торусну таблу $n \times n$ могуће је поставити n краљица које се међусобно не нападају ако и само ако је $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$. Ово је доказано у 4. задатку са СМО 2012.

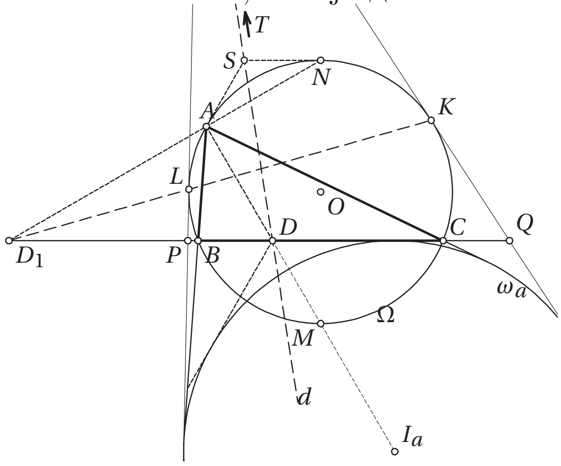
6. Нека унутрашња и спољна симетрала угла BAC секу праву BC редом у тачкама D и (можда бесконачној) D_1. Заједничке тангенте се секу у центру T позитивне хомотетије $\mathscr{H}$ која слика приписани круг ω_a у описани круг Ω. Ако је T бесконачна тачка, $\mathscr{H}$ је транслација, а остатак доказа је исти.

Лема. Нека произвољна права p кроз D_1 сече круг Ω у тачкама L и K. Тангенте у L и K на Ω секу праву BC редом у тачкама P и Q. Тада је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$.

Доказ. Означимо $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle PAB = x$ и $\sphericalangle CAQ = y$.

Ако је D_1 бесконачна тачка, тврђење је тривијално по симетрији. Ако није, из $\triangle PBL \sim \triangle PLC$ следи $\frac{PB}{PL} = \frac{PL}{PC} = \frac{LB}{LC}$ и одатле $\frac{PB}{PC} = \left(\frac{LB}{LC}\right)^2$. Слично је $\frac{QB}{QC} = \left(\frac{KB}{KC}\right)^2$. Пошто је $\frac{LB}{LC} \cdot \frac{KB}{KC} = \frac{[KLB]}{[KLC]} = \frac{D_1B}{D_1C} = \frac{AB}{AC}$, добијамо $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QB}{QC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Како је $\frac{PB}{PC} = \frac{PB}{PA} \cdot \frac{PA}{PC} = \frac{\sin x}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+x)}$ и $\frac{QB}{QC} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QA}{QC} = \frac{\sin(\alpha+y)}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin y}$, множење даје $(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta})^2 \cdot \frac{\sin(\alpha+y)/\sin y}{\sin(\alpha+x)/\sin x} = (\frac{AC}{AB})^2 = (\frac{\sin\gamma}{\sin\beta})^2$, одакле је $\sin\alpha \operatorname{ctg} y + \cos\alpha = \frac{\sin(\alpha+y)}{\sin y} = \frac{\sin(\alpha+x)}{\sin x} = \sin\alpha \operatorname{ctg} x + \cos\alpha$, тј. $x = y$. $\square$

Ако су K и L додирне тачке заједничких тангенти са Ω, остаје да се покаже да тачка D_1 лежи на правој KL, тј. на полари тачке T у односу на Ω. По ставу о полу и полари, довољно је доказати да T лежи на полари d тачке D_1 у односу на Ω.



Означимо са N средиште лука BAC круга Ω. Слика тачке D при хомотетији $\mathscr{H}$ је пресек S тангенти на Ω у тачкама A и N, па тачка T лежи на правој DS. С друге стране, тачка D је на полари d јер је четворка $(B, C; D_1, D)$ хармонијска, а тачка S је такође на d јер полара тачке S у односу на Ω, што је права AN, садржи тачку D_1. Према томе, праве DS и d се поклапају, чиме је доказ завршен.

Друго решење. Нека заједничке тангенте додирују круг Ω у тачкама K и L, при чему је теме LP тангента ближа темену B. Означимо са M средиште оног лука BC који не садржи тачку A, а са O и I_a редом центре описаног и приписаног круга наспрам A.

Како је $\sphericalangle LPI_a = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle LPC$ и $\sphericalangle LAI_a = \sphericalangle LAM = \frac{1}{2}\sphericalangle LOM = \frac{1}{2}\sphericalangle LPD_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle LPC$, следи да је $\sphericalangle LPI_a + \sphericalangle LAI_a = 180^\circ$, па је четвороугао $ALPI_a$ тетиван. Слично, и четвороугао $AKQI_a$ је тетиван. Сада имамо $\sphericalangle PAI_a = \sphericalangle PLI_a = \sphericalangle QKI_a = \sphericalangle QAI_a$, јер су углови PLI_a и QKI_a симетрични у односу на праву OI_a, а одавде је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAC$.