9. такмичење „Romanian Master of Mathematics“

Дан 1: Петак, 24. фебруар 2017, Букурешт

Language: Serbian

Задатак 1. (a) Доказати да се сваки природан број n на јединствен начин може записати у облику

$$n = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j-1} 2^{m_j},$$

где су $k \geqslant 0$ и $0 \leqslant m_1 < m_2 < \cdots < m_{2k+1}$ цели бројеви.

Овакав број k називамо *тежином* броја n.

(b) Наћи (у експлицитном облику) разлику између броја природних бројева не већих од 2^{2017} који имају парну тежнину и броја природних бројева не већих од 2^{2017} који имају непарну тежину.

Задатак 2. Наћи све природне бројеве n који испуњавају следећи услов: за сваки моничан полином P степена не већег од n са целобројним коефицијентима постоји природан број $k \leqslant n$ и $k+1$ различитих целих бројева x_1, x_2, …, x_{k+1} за које важи

$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) = P(x_{k+1}).$$

Напомена. Полином називамо *моничним* ако му је водећи коефицијент једнак 1.

Задатак 3. Нека је n природан број већи од 1, и нека је X скуп са n елемената. Непразну фамилију подскупова A_1, …, A_k скупа X називамо *збијеном* уколико је унија $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ прави подскуп скупа X и не постоји елемент скупа X који се налази у тачно једном скупу A_i. Наћи највећу могућу кардиналност фамилије правих непразних подскупова скупа X такве да ниједна њена непразна потфамилија није збијена.

Напомена. Подскуп A скупа X је *прави* ако важи $A \neq X$. Подразумевамо да су скупови у посматраним фамилијама међусобно различити. Читава фамилија сматра се потфамилијом.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за израду $4\frac{1}{2}$ сата.

9. такмичење „Romanian Master of Mathematics“

Дан 2: Субота, 25. фебруар 2017, Букурешт

Language: Serbian

Задатак 4. Са $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ обележимо графике квадратних функција $f_1(x) = p_1x^2 + q_1x + r_1$ и $f_2(x) = p_2x^2 + q_2x + r_2$, за $p_1 > 0 > p_2$, у Декартовој координатној равни. Графици $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ се секу у различитим тачкама A и B. Четири тангенте на $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ у A и B образују конвексан тангентан четвороугао. Показати да графици $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ имају заједничку осу симетрије.

Задатак 5. Фиксирајмо природан број $n \geqslant 2$. Под $n \times n$ *мустром* подразумевамо произвољну таблицу формата $n \times n$ из које је уклоњено n поља на такав начин да је из сваке врсте и сваке колоне уклоњено по тачно једно поље. Таблице формата $1 \times k$ или $k \times 1$ за ма који природан број k називамо *дашчицама*. За произвољну мустру A, нека је $m(A)$ најмањи могућ број дашчица на које се A може изделити. Наћи све могуће вредности које може узимати $m(A)$ док A пролази кроз скуп свих могућих $n \times n$ мустри.

Задатак 6. На страницама AB, BC, CD и DA конвексног четвороугла $ABCD$ изабране су тачке P, Q, R и S, редом. Дужи PR и QS деле четвороугао $ABCD$ на четири четвороугла од којих сваки има међусобно нормалне дијагонале. Доказати да тачке P, Q, R и S леже на истој кружници.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за израду $4\frac{1}{2}$ сата.