Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Први разред – А категорија

1. Да ли је могуће у свако поље таблице формата 2017×2017 уписати по један од бројева 1, 2, 3, …, 2017 на такав начин да се у свакој врсти, у свакој колони и на свакој дијагонали сваки од бројева појављује највише једанпут? (Притом посматрамо дијагонале свих могућих дужина: дакле, две дијагонале дужине 2017, четири дијагонале дужине 2016, четири дијагонале дужине 2015, …, четири дијагонале дужине 2 и четири дијагонале дужине 1.)

2. Одредити све природне бројеве a и b за које је број

$$a^4b + 3b - 2a^2b^2 - a^2 - 3b^3$$

степен двојке.

3. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c=3$. Доказати:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+bc+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+ab}} \geqslant \sqrt{3}.$$

4. Доказати да у $\triangle ABC$ симетрала $\measuredangle A$, права одређена средиштима страница AC и BC, као и права одређена додирним тачкама уписане кружнице и страница AB и BC, све пролазе кроз исту тачку.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детально образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Други разред – А категорија

1. Колико највише страница може имати конвексан многоугао коме су дужине свих дијагонала једнаке?

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$x + y + \cos z = 3;$$
$$2x - y + \sin\{z\} = 1;$$
$$x - 3y - \operatorname{arctg} z^2 = -2.$$

(Са $\{z\}$ означавамо разломљени део броја z, тј. $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$.)

3. Нека функција odraz пресликава цифре $0, 1, 2, 5, 8$ у цифре $0, 1, 5, 2, 8$, редом. Природан број $n = \overline{t_k t_{k-1} \cdots t_1 t_0}$ називамо *одразабилан* ако су му све цифре из скупа $\{0, 1, 2, 5, 8\}$ и притом важи $t_0 \neq 0$, и дефинишемо

$$\operatorname{odraz}(n) = \overline{\operatorname{odraz}(t_0)\operatorname{odraz}(t_1) \cdots \operatorname{odraz}(t_{k-1})\operatorname{odraz}(t_k)}$$

(другим речима, функција odraz представља одраз у огледалу броја на екрану калкулатора). Наћи све природне бројеве n са следећим особинама:

1° n је одразабилан и $\operatorname{odraz}(n) = n$;

2° n^2 је одразабилан и $\operatorname{odraz}(n^2) = n^2$.

4. Барон Минхаузен живи у земљи Z у којој су градови у власти канцелара Ота и краља Фрање (сваки град у власништву тачно једног од њих). Ти градови су повезани неким путевима (путевима је могуће кретати се у оба смера), при чему: свака два града су повезана највише једним путем; сваки пут повезује град канцелара Ота са градом краља Фрање; сваки град је путем повезан са тачно k других градова, $k \geqslant 2$; из сваког града је путевима могуће стићи до сваког другог града. Земља Z је у рату са земљом W. Барон Минхаузен је јавио непријатељима из земље W да постоји пут такав да, уколико се он уништи, постојаће нека два града таква да више неће бити могуће стићи из једног у други преосталим путевима. Да ли Барон Минхаузен лаже?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је $\triangle ABC$. Тачке I_a, I_b и I_c су центри његових приписаних кружница, а тачке A_1, B_1 и C_1 су тачке додира тих приписаних кружница с одговарајућим страницама, редом. Доказати да се праве I_aA_1, I_bB_1 и I_cC_1 секу у једној тачки.

2. a) Доказати да постоји јединствена функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ таква да важи:

- $f(p) = 1$ за све просте бројеве p;
- $f(ab) = f(a)b + af(b)$ за све $a, b \in \mathbb{N}_0$;
- $f(0) = f(1) = 0$.

b) Одредити све природне бројеве n мање од 100 за које важи $f(f(n)) = 1$, где је f функција из дела под a).

3. Доказати да за сваки полином $P(x)$ са реалним коефицијентима постоје полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ такви да важи

$$P(x) = Q(x^2) + R((x+1)^2).$$

4. Свечаној вечери присуствује $6k + 3$ брачних парова, где је k природан број. Званице седе на $12k + 6$ равномерно распоређених места око округлог стола. Сваки мушкарац међу званицама има тачно једну сестру, а свака жена тачно једног брата (брат и сестра не могу бити у браку). Званице су распоређене за столом тако да сваки мушкарац седи ближе својој супрузи него својој сестри. Нека је $f(k)$ максималан могућ број жена које седе ближе свом брату него свом мужу, где максимум посматрамо над свим могућим распоредима и над свим могућим скуповима званица које испуњавају услове задатка. Доказати: $f(k) = 6k$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Четврти разред – А категорија

1. Дате су функције $f(x) = x^2 + x + 2$ и $g(x) = x^2 - x + 2$. Да ли постоји функција $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x))\ ?$$

2. Шифра за закључавање Кикиног телефона формира се на следећи начин. На мрежи тачака 3×3 потребно је нацртати путању сачињену од неколико дужи, где свака дуж повезује неке две од посматраних тачака, и притом је полазна тачка следеће дужи увек завршна тачка претходне. Током исцртавања путање, сваки пут када путања пређе преко неке тачке (било као унутрашње или крајње тачке неке дужи), та тачка више не може бити коришћена као крајња тачка ниједне наредне дужи (с изузетком услова да је полазна тачка следеће дужи увек завршна тачка претходне), али јесте дозвољено да таква тачка буде унутрашња тачка наредних дужи. Кики жели да њена шифра на телефону испуњава следеће услове:

1° свих 9 тачака морају лежати на исцртаној путањи;

2° траг који путања остави је осносиметричан (под *трагом* подразумевамо унију дужи као геометријских објеката, дакле без информација о њиховом редоследу, смеру кретања и евентуалном преклапању неких делова различитих дужи);

3° на трагу путање постоје тачно две тачке (од посматраних 9) које су спојене само с по једном другом тачком.

Да ли Кики може да постави овакву шифру на свом телефону? Ако може, између колико шифара може да бира (до на ротацију и/или симетрију)?

3. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека су k_a, k_b и k_c његове приписане кружнице наспрам темена A, B и C, респективно. Нека су O и I центар описане и уписане кружнице. Означимо са t_a, t_b и t_c спољне заједничке тангенте парова кружница k_b и k_c, k_c и k_a, k_a и k_b, респективно, различите од правих BC, CA и AB. Доказати да центар уписане кружнице троугла одређеног правима t_a, t_b и t_c лежи на правој OI.

4. Наћи све природне бројеве n чији се скуп правих делилаца (тј. свих делилаца изузев n) може поделити у два дисјунктна скупа од по бар 2 елемента на такав начин да у једном скупу буду узастопни Фибоначијеви бројеви, а у другом узастопни троугаони бројеви.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Први разред – Б категорија

1. Нека су AB и CD основице трапеза $ABCD$, а E средиште крака BC. Ако важи $AE = 10$, $DE = 8$ и $\measuredangle AED = 30^\circ$, одредити површину овог трапеза.

2. У држави Незналији, директор корпорације *Пропаст*$^{\text{TM}}$ је обавестио раднике да ће им ове године плата бити смањена за 10%, следеће године повећана за 11%, наредне године смањена за 12%, године после тога повећана за 13% итд. идућих 90 година. Да ли ће у неком тренутку запослени имати већу плату од тренутне?

3. У колико најмање потеза може скакач из доњег левог поља шаховске табле (a1) стићи до горњег десног (h8)? Доказати!

4. Колико има парних петоцифрених бројева који нису дељиви са 3 и у чијем запису нема цифре 9?

5. Решити ребус:

$$\textit{ПЕТ} \cdot \textit{ПЕТ} = \textit{ДЕСЕТ}$$

(истим словима одговарају исте а различитим словима различите цифре, и притом $\textit{П},\textit{Д} \neq 0$).

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Други разред – Б категорија

1. За које вредности параметара p и q једначина

$$\sqrt{x^2+px+q}+x=2017$$

има више од 2017 различитих реалних решења?

2. У $\triangle ABC$ тачке A_0, B_0 и C_0 су подножја висина из темена A, B и C, редом, и притом важи $\triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C_0$.

a) Ако се зна да је $\triangle ABC$ оштроугли, израчунати његове углове.

b) Ако се зна да је $\triangle ABC$ тупоугли, израчунати његове углове.

3. Одреди најмањи природан број n за који се ниједан од разломака

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \ldots, \frac{2015}{n+2017}$$

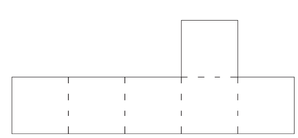
не може скратити.

4. Наћи све вредности реалног параметра a за које једначина

$$ax^2-(a+2)x+(a+1)=0$$

има два различита реална решења већа од 1.

5. Дата је фигура на слици доле, сачињена од шест јединичних квадратића. Да ли је могуће од непарног броја копија ове фигуре саставити правоугаоник?



Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Трећи разред – Б категорија

1. У интервалу $[0, 2\pi]$ решити једначину

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

2. Основа пирамиде $MABC$ је једнакокраки $\triangle ABC$ ($AB \cong AC$). Подножје висине пирамиде из врха M је на средини висине AA_0 у $\triangle ABC$. Кроз ивицу BC је постављена раван која је нормална на ивицу MA и сече је у тачки S. Познато је да та раван заклапа угао од 30° са равни ABC. Ако запремина пирамиде $SABC$ износи 2017, наћи запремину пирамиде $MSBC$.

3. Да ли је могуће број 2017 представити као збир три природна броја таква да никоја два међу њима нису узајамно прости?

4. Дате су тачке $A(1,0)$ и $B(4,3)$. За реалан број p, означимо са N_p тачку на правој AB која је најближа кружници

$$(x-p)^2 + (y-1-p^2)^2 = 1$$

(под растојањем тачке од кружнице подразумевамо растојање од те тачке до њој најближе тачке на кружници). За које вредности параметра p се тачка N_p налази строго између тачака A и B?

5. Одредити број начина да се природан број n представи као збир неколико (два или више) природних бројева, при чему је битан поредак. (На пример, за $n = 4$ имамо следеће могућности: $3+1$, $2+2$, $1+3$, $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$, $1+1+1+1$, тј. укупно 7 тражених начина.)

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Четврти разред – Б категорија

1. Дате су параболе $y = x^2+3x+6$ и $y = x^2+5x+3$. Наћи једначину њихове заједничке тангенте, као и тачке додира те тангенте са овим параболама.

2. Ако је $n^2 + 2^n$ прост број за неки природан број $n > 1$, доказати да је n дељив са 3 али није дељив са 6.

3. У свако поље таблице формата $n \times n$ потребно је уписати по један од бројева 1, 2, 3, …, n на такав начин да се у свакој врсти, у свакој колони и на свакој дијагонали сваки од бројева појављује највише једанпут. (Притом посматрамо дијагонале свих могућих дужина: дакле, две дијагонале дужине n, четири дијагонале дужине $n-1$, четири дијагонале дужине $n-2$, …, четири дијагонале дужине 2 и четири дијагонале дужине 1.) Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n = 4$;

b) $n = 5$?

4. Израчунати

$$\left\lfloor \underbrace{\sqrt{2017+\sqrt{2017+\cdots+\sqrt{2017+\sqrt{2017}}}}}_{2017\text{ коренова}} \right\rfloor.$$

(Са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број не већи од x.)

5. Дат је $\triangle ABC$, $\measuredangle C = 90^\circ$. Уочени су квадрати $AEDC$ и $CFGB$ у његовој спољашњости. Дуж EB суче дужи AC и AG редом у тачкама H и I. Дуж AG сече дуж BC у тачки J. Ако површина $\triangle AIB$ износи 2017, израчунати површину четвороугла $HCJI$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.