Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

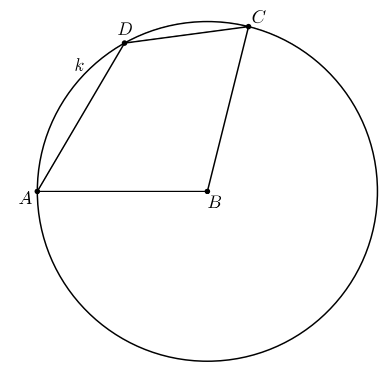
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред – А категорија

1. Површ парка можемо попунити правоугаоницима димензија $10{,}5 \times 20{,}5$, где у једном реду можемо поређати 95 таквих правоугаоника а имамо укупно 48 редова (због $\frac{1000}{10{,}5} > 95$ и $\frac{1000}{20{,}5} > 48$). Тиме смо добили укупно 4560 таквих правоугаоника. Штавише, пошто важи $1000 - 48 \cdot 20{,}5 = 1000 - 984 = 16 > 10{,}5$, у преосталу траку можемо сместити још 48 таквих правоугаоника ротираних за $90°$, чиме укупан број правоугаоника постаје 4608. Како имамо 4567 стабала, по Дирихлеовом принципу постоји правоугаоник у ком се не налази центар ниједног стабла. Међутим, тада средишњи део тог правоугаоника формата 10×20 представља простор унутар ког се не налази ниједно стабло (нити део стабла).

2. Опишимо кружницу k са центром у B и полупречником 2. На њој се налазе тачке A и C. У тој кружници периферијски углови над краћим луком $\widehat{AC}$ износе $\frac{104°}{2} = 52°$, па периферијски углови над дужим луком $\widehat{AC}$ износе $180° - 52° = 128°$. Одатле закључујемо $D \in k$, па следи $BD = 2$.



Оп 2017 1А 2

3. Имамо $12^x + 10^y \equiv 1 + (-1)^y \in \{0, 2\} \pmod{11}$. Пошто $11 \nmid 7102$, y мора бити парно и стране једначине дају остатак 2 при дељењу са 11. Остаци при дељењу броја 7102^z са 11, за $z = 1, 2, 3\dots$, понављају се у периодима облика $(7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8, 1)$, па пошто је период дужине 10, закључујемо $z = 10k + 3$. Даље, посматрањем једначине по модулу 5 добијамо да је лева страна конгруентна са 2^x а десна са 2^z. Остаци при дељењу степена двојке са 5 понављају се у периодима облика $(2, 4, 3, 1)$, па пошто је период дужине 4, следи да x и z дају исти остатак при дељењу са 4; специјално, пошто је z непаран број, следи да је и x непаран број.

Пошто $2 \mid 7102$ али $4 \nmid 7102$, највећи степен двојке који дели десну страну је 2^z. Даље, највећи степен двојке који дели 12^x је 2^{2x}, а највећи степен двојке који дели 10^y је 2^y; уколико би ови степени били различити, тада би највећи степен двојке који дели леву страну износио $2^{\min\{2x,y\}}$, али пошто су $2x$ и y парни бројеви, ова вредност не би могла бити једнака 2^z (јер, подсетимо се, $2 \nmid z$). Преостаје $y = 2x$, и тада једначину можемо записати као $12^x + 100^x = 7102^z$. Но, како је x непаран број, лева страна може се факторисати као $(12+100)(12^{x-1} - 12^{x-2}100 + \cdots - 12 \cdot 100^{x-2} + 100^{x-1})$, тј. лева страна је дељива са 112, али пошто $112 \nmid 7102$, следи да постављена једначина нема решења.

4. Посматрајмо прво четири тачке A, B, C, D такве да је једна од њих у унутрашњости троугла који образују преостале три (без умањења општости, нека $D \in \operatorname{int} \triangle ABC$). Пошто међу угловима $\measuredangle ADB, \measuredangle ADC, \measuredangle BDC$ постоји бар један не мањи од $120°$, у овом случају следи $f(A, B, C, D) \geqslant 120°$.

Посматрајмо сада случај када ниједна од тачака A, B, C, D не лежи у унутрашњости троугла који образују преостале три, тј. када оне образују конвексан четвороугао (без умањења општости, четвороугао $ABCD$). Како важи $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD + \measuredangle CDA + \measuredangle DAB = 360°$, бар један од ова четири угла мора бити не мањи од $90°$, па у овом случају следи $f(A, B, C, D) \geqslant 90°$.

Према томе, закључујемо $\min f(A, B, C, D) \geqslant 90°$. Уколико тачке A, B, C, D чине темена правоугаоника, тада се ова граница достиже, па је решење задатка $90°$.

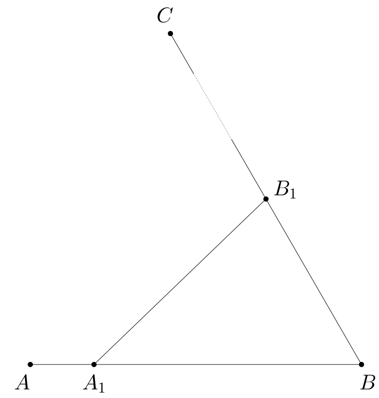
5. Користићемо следеће запажање: ако важи $||y| - a| = b$ и притом имамо $0 < a < b$, тада следи $|y| = a + b$. Заиста, имамо $|y| - a = \pm b$, тј. $|y| = a \pm b$, али због $a - b < 0$ остаје $|y| = a + b$.

Ослобађањем последње апсолутне вредности у поставци добијамо $|\cdots|||x| - 1| - 2| \cdots - 2016| - 2017 = \pm 2017$, тј. $|\cdots|||x| - 1| - 2| \cdots - 2016| \in \{0, 4034\}$. Сада ћемо разликовати ова два случаја.

У првом случају следи $|\cdots|||x| - 1| - 2| \cdots - 2015| = 2016$. Применом запажања с почетка добијамо $|\cdots|||x| - 1| - 2| \cdots - 2014| = 2016 + 2015$, па поновном применом истог запажања $|\cdots|||x| - 1| - 2| \cdots - 2013| = 2016 + 2015 + 2014$ итд. На крају преостаје $|x| = 2016 + 2015 + \cdots + 1$, па у овом случају имамо два решења.

У другом случају на исти начин добијамо $|x| = 4034 + 2016 + 2015 + \cdots + 1$, па овде имамо још два решења. Дакле, укупно постоје четири решења постављене једначине.

Други разред – А категорија



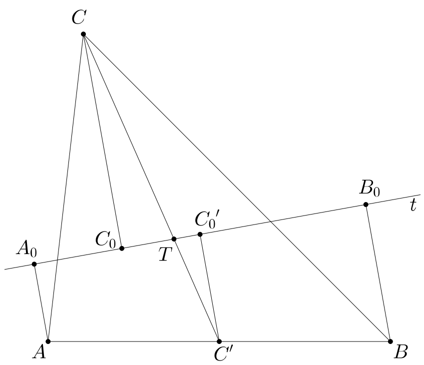
Оп 2017 2А 1

1. Нека t означава протекле секунде од када су мрави a и b започели свој пут. Нека су A_1 и B_1 редом положаји мрава a и b после протеклих t секунди. Тада важи $BA_1 = 260 - t$ и $BB_1 = 3t$. На основу косинусне теореме имамо

$$A_1B_1^2 = BA_1^2 + BB_1^2 - 2BA_1 \cdot BB_1 \cos 60^\circ = (260-t)^2 + 9t^2 - 2(260-t)3t \cdot \frac{1}{2} = 13t^2 - 1300t + 260^2.$$

Јасно, растојање између мрава је минимално онда када је ова вредност минимална, а пошто је ово квадратна функција по t, она има минимум за $t = \frac{1300}{2\cdot 13} = 50$. Пошто се након 50 секунди мрави заиста и даље крећу ка својим одредиштима, решење задатка је 50 секунди.

2. Нека је C' средиште странице AB, а C_0' ортогонална пројекција тачке C' на праву t. Четвороугао ABB_0A_0 је трапез а $C'C_0'$ је његова средња линија, па имамо $AA_0 + BB_0 = 2C'C_0'$. Пошто су $\triangle CC_0T$ и $\triangle C'C_0'T$ слични (јер имају све подударне углове) с коефицијентом сличности 2 (јер важи $\frac{CT}{C'T} = 2$, према особини тежишта), следи $CC_0 = 2C'C_0'$. Из ова два закључка добијамо $AA_0 + BB_0 = CC_0$.



Оп 2017 2А 2

3. У првом кораку пчела има 6 могућности, а у сваком следећем највише 5 (јер се не може вратити на поље с ког је управо дошла). Тиме добијамо горњу границу $6 \cdot 5^{n-1}$ за број тражених путања. Да бисмо доказали и доњу границу, приметимо да пчела у првом кораку може бирати једну од 6 могућности, а у сваком следећем кораку постоје три поља таква да се ступањем на њих пчела удаљава од полазног поља; ограничавајући се само на одабир оваквих поља у сваком потезу, пчела се обезбеђује да никада неће наићи на поље на ком је већ била, па је број могућих путања бар $6 \cdot 3^{n-1}$, тј. $2 \cdot 3^n$.

4. Сабирањем неједнакости $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$ и $7x - 1 < \lfloor 7x \rfloor \leqslant 7x$ добијамо

$$10x - 3 < \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor \leqslant 10x,$$

тј. $10x - 3 < 2017 \leqslant 10x$. Одатле закључујемо $201{,}7 \leqslant x < 202$, па следи $\lfloor x \rfloor = 201$ и $\lfloor 2x \rfloor = 403$, те добијамо и $\lfloor 7x \rfloor = 2017 - \lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor = 1413$. То даље даје

$$1413 = \lfloor 7(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor = \lfloor 7\lfloor x \rfloor + 7\{x\} \rfloor = \lfloor 1407 + 7\{x\} \rfloor = 1407 + \lfloor 7\{x\} \rfloor,$$

то јест $\lfloor 7\{x\} \rfloor = 6$, а онда добијамо $\frac{6}{7} \leqslant \{x\} < 1$. Сада следи $\lfloor 6x \rfloor = \lfloor 6(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor = \lfloor 6\lfloor x \rfloor + 6\{x\} \rfloor = 6\lfloor x \rfloor + \lfloor 6\{x\} \rfloor$, па с обзиром на неједнакост $\frac{36}{7} \leqslant 6\{x\} < 6$ имамо $\lfloor 6\{x\} \rfloor = 5$. Одатле добијамо

$$\{6x\} = 6x - \lfloor 6x \rfloor = 6(\lfloor x \rfloor + \{x\}) - (6\lfloor x \rfloor + \lfloor 6\{x\} \rfloor) = 6\{x\} - 5.$$

Слично следи и $\{5x\} = 5\{x\} - 4$ и $\{2x\} = 2\{x\} - 1$. Убацимо сада све ово у другу једначину. Она се своди на

$$3\{x\}(5\{x\} - 4) = 4(2\{x\} - 1)(6\{x\} - 5),$$

што после сређивања постаје $33\{x\}^2 - 52\{x\} + 20 = 0$. Решавањем ове једначине добијамо

$$\{x\} = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4\cdot 33\cdot 20}}{66} = \frac{52 \pm \sqrt{2704 - 2640}}{66} = \frac{52 \pm \sqrt{64}}{66} = \frac{52 \pm 8}{66},$$

тј. $\{x\} = \frac{52+8}{66} = \frac{60}{66} = \frac{10}{11}$ или $\{x\} = \frac{52-8}{66} = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}$. Другу могућност одбацујемо јер се не уклапа у услов $\frac{6}{7} \leqslant \{x\}$. Остаје, дакле, $\{x\} = \frac{10}{11}$, и једино решење система из поставке је

$$x = 201 + \frac{10}{11} = \frac{2221}{11}.$$

5. *Прво решење.* За $n = 1$ имамо $x^2 = 2y_1^2$, што је немогуће. Докажимо сада да за свако $n > 1$ постоје тражени бројеви. За $n = 2$ имамо за $(x; y_1, \ldots, y_n)$ решење $(2; 1, 1)$; за $n = 3$ имамо $(6; 4, 1, 1)$, за $n = 4$ имамо $(6; 3, 2, 2, 1)$. Приметимо да за сва три решења важи $y_n = 1$. Надаље, ако за неко n имамо решење $(x; y_1, \ldots, y_n)$ са $y_n = 1$, онда за $n+3$ имамо решење $(2x; 2y_1, \ldots, 2y_{n-1}, 1, 1, 1, 1)$; заиста:

$$2((2y_1)^2 + \cdots + (2y_{n-1})^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 4 \cdot 2(y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 1) = 4x^2 = (2x)^2.$$

Према томе, с обзиром на конструисана решења за $n \in \{2, 3, 4\}$, индукцијом добијамо егзистенцију решења за све $n > 1$. Овим је доказ завршен.

Друго решење. Докажимо прво да за сваки природан број k постоји k квадрата природних бројева чија је сума такође квадрат природног броја. Доказ спроводимо индукцијом по k. За $k = 1$ тврђење је тривијално тачно. Даље, ако важи $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2 = u^2$, тада, уколико је u непаран број, имамо $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2 + (\frac{u^2-1}{2})^2 = u^2 + \frac{u^4-2u^2+1}{4} = (\frac{u^2+1}{2})^2$, а уколико је u паран број, тада је u^2 дељиво са 4, па имамо $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2 + (\frac{u^2-4}{4})^2 = u^2 + \frac{u^4-8u^2+16}{16} = (\frac{u^2+4}{2})^2$ (тј. можемо узети $z_{k+1} = \frac{u^2-1}{2}$, односно $z_{k+1} = \frac{u^2-4}{4}$, респективно).

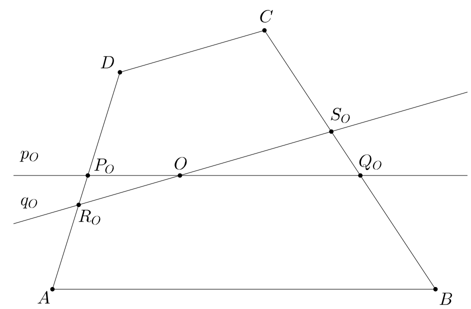
Сада доказ егзистенције бројева из поставке за задато n, $n > 1$, добијамо на следећи начин: одаберемо $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ такве да сума њихових квадрата буде потпун квадрат, рецимо v^2, и одаберемо $y_n = v$. Тада имамо

$$2(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 + y_n^2) = 2(v^2 + v^2) = 4v^2 = (2v)^2,$$

што је и требало доказати.

Трећи разред – А категорија

1. За произвољну тачку O унутар четвороугла $ABCD$ једнакост $P_O O \cdot O Q_O = R_O O \cdot O S_O$ је еквивалентна с чињеницом да су тачке P_O, R_O, Q_O и S_O концикличне, што следи из потенције тачке O у односу на кружницу. Ово је даље еквивалентно с условом $\measuredangle P_O R_O S_O \cong \measuredangle P_O Q_O S_O$, али како важи $\measuredangle P_O R_O S_O = 180^\circ - \measuredangle ADC$ и $\measuredangle P_O Q_O S_O \cong \measuredangle ABC$, претходни услов заправо је еквивалентан с условом $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180^\circ$, тј. с условом да је четвороугао $ABCD$ тетиван. Дакле, оба услова из поставке еквивалентни су с тетивношћу четвороугла $ABCD$, па следи да су они еквивалентни међусобно.



Оп 2017 3А 1

2. Важи

$$2^n + 3^{n+3} + 5^n + 7^{n+4} \equiv (-1)^n + 0 + (-1)^n + 1 = 2 \cdot (-1)^n + 1 \pmod 3,$$

па је за парно n посматрани број дељив са 3 а тиме и сложен. Нека је сада n непарно. Тада важи

$$2^n + 3^{n+3} + 5^n + 7^{n+4} \equiv 2^n + (-2)^{n+3} + 0 + 2^{n+4} = 2^n + 2^{n+3} + 2^{n+4} = 2^n(1 + 8 + 16) = 25 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 5,$$

па је тада посматрани број дељив са 5 и према томе поново је сложен.

3. Означимо са x_n број могућих пчелиних путања од n корака, а са y_n Дулетових. Видети решење за трећи задатак у разреду 2А, где је показана неједнакост $x_n \geqslant 2 \cdot 3^n$. Приметимо даље да Дуле у првом кораку има 4 могућности, а у сваком следећем највише 3 (јер се не може вратити на поље с ког је управо дошао), па за број његових путања добијамо горњу границу $y_n \leqslant 4 \cdot 3^{n-1}$. Одатле, $x_n \geqslant 2 \cdot 3^n = 6 \cdot 3^{n-1} \geqslant 4 \cdot 3^{n-1} \geqslant y_n$, што је и требало доказати.

4. Уколико за x узмемо реалан број већи од свих a_i и b_i, неједнакост из поставке своди се на $-b_1 - b_2 - \dots - b_n \leqslant -a_1 - a_2 - \dots - a_n$, а ако за x узмемо реалан број мањи од свих a_i и b_i, неједнакост из поставке своди се на $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leqslant a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Одатле директно следи

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Фиксирајмо сада природан број k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Нека је x произвољан реалан број за који важи $a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}$. Тада се постављена неједнакост своди на

$$|x - b_1| + |x - b_2| + \dots + |x - b_n| \leqslant (x - a_1) + \dots + (x - a_k) - (x - a_{k+1}) - \dots - (x - a_n).$$

С друге стране, из очигледних неједнакости $|y| \geqslant y$ и $|y| \geqslant -y$ добијамо

$$|x - b_1| + |x - b_2| + \dots + |x - b_n| \geqslant (x - b_1) + \dots + (x - b_k) - (x - b_{k+1}) - \dots - (x - b_n),$$

па следи

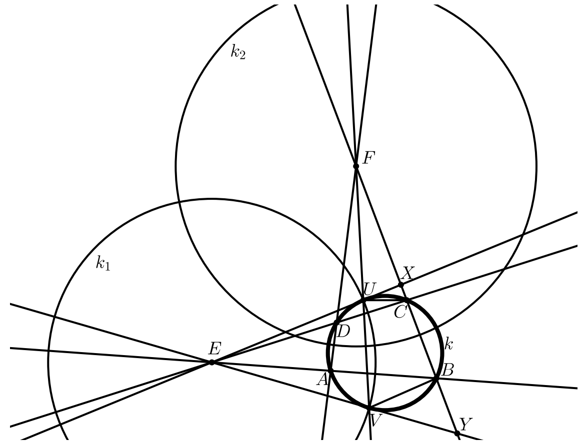
$$(x - b_1) + \dots + (x - b_k) - (x - b_{k+1}) - \dots - (x - b_n) \leqslant (x - a_1) + \dots + (x - a_k) - (x - a_{k+1}) - \dots - (x - a_n).$$

Све појаве вредности x с обе стране неједнакости се испотиру, и одузимањем од ове неједнакости раније добијену једнакост $b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ добијамо $-2(b_1 + b_2 + \dots + b_k) \leqslant -2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$, тј. $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leqslant b_1 + b_2 + \dots + b_k$.

5. Нека се кружнице k и k_1 секу у тачкама U и V. Докажимо да су тачке F, U и V колинеарне. Из овога ће лако следити тврђење задатка: заиста, из $i_{k_2}(k) = k$ и колинеарности тачака F, U и V добијамо $i_{k_2}(U) = V$, а одатле и $i_{k_2}(k_1) = k_1$, тј. $k_1 \perp k_2$. Докажимо зато жељену колинеарност.

Нека права EU (која је, приметимо, тангента на k, што следи из $k \perp k_1$) сече праву FC у тачки X. Из особина спољашњих и периферијских углова добијамо:

$$\begin{aligned}
\measuredangle XFU &= \measuredangle EXC - \measuredangle FUX = (\measuredangle ECB - \measuredangle CEX) - \measuredangle EUV \\
&= (\measuredangle ECB - (\measuredangle CUX - \measuredangle UCE)) - \measuredangle EUV \\
&= (\measuredangle ECB + \measuredangle UCE) - (\measuredangle CUX + \measuredangle EUV) \\
&= \measuredangle UCB - (180^\circ - \measuredangle CUV) = \measuredangle UCB - \measuredangle CBV.
\end{aligned}$$



Оп 2017 3А 5

Даље, означимо са Y пресек правих EV и FC. Слично као малопре, израчунавамо:

$$\begin{aligned}
\measuredangle YFV &= \measuredangle EVU - \measuredangle EYB = \measuredangle EVU - (\measuredangle EBC - \measuredangle BEY) \\
&= \measuredangle EVU - (\measuredangle EBC - (\measuredangle BVY - \measuredangle VBE)) = (\measuredangle EVU + \measuredangle BVY) - (\measuredangle EBC + \measuredangle VBE) \\
&= 180^\circ - \measuredangle BVU - \measuredangle CBV = \measuredangle UCB - \measuredangle CBV.
\end{aligned}$$

Другим речима, добили смо $\measuredangle XFU = \measuredangle YFV$. Одавде директно следи да су тачке F, U и V колинеарне, чиме је доказ завршен.

Четврти разред – А категорија

1. Трансформишимо израз $\ln \frac{x^x}{y^y} = x \ln x - y \ln y$. Уочимо функцију $f(x) = x \ln x$. Ова функција је непрекидна на $[e^{-3}, e]$ и диференцијабилна на (e^{-3}, e), и имамо $f'(x) = \ln x + 1$. По теореми о средњој вредности, постоји $c \in (e^{-3}, e)$ такво да важи $x \ln x - y \ln y = f'(c)(x - y) = (\ln c + 1)(x - y)$. Пошто $c \in (e^{-3}, e)$, следи $-2 \leqslant \ln c + 1 \leqslant 2$, па добијамо

$$\left| \ln \frac{x^x}{y^y} \right| = |f'(c)||x - y| \leqslant 2|x - y|,$$

што је и требало доказати.

2. Доказујемо индукцијом да за све $m \in \mathbb{N}$ важи $(a+1)^m \mid a^{(a+1)^{m-1}} + 1$. За $m = 1$ ово је очигледно. Претпоставимо сада да $(a+1)^m \mid a^{(a+1)^{m-1}} + 1$ за дато m. Како је a паран број, $a + 1$ је непаран, па имамо

$$a^{(a+1)^m} + 1 = \left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^{a+1} + 1^{a+1} = \left(a^{(a+1)^{m-1}} + 1\right) \sum_{j=0}^{a} (-1)^j \left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^j.$$

По индуктивној хипотези, $(a+1)^m \mid a^{(a+1)^{m-1}} + 1$. Даље, имамо

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{a} (-1)^j \left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^j &\equiv \sum_{j=0}^{a} (-1)^j \left((-1)^{(a+1)^{m-1}}\right)^j = \sum_{j=0}^{a} (-1)^j (-1)^j \\
&\equiv \sum_{j=0}^{a} 1 = a + 1 \equiv 0 \pmod{a+1},
\end{aligned}$$

то јест, $a + 1 \mid \sum_{j=0}^{a} (-1)^j \left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^j$. Овим смо показали да $(a+1)^{m+1} \mid a^{(a+1)^m} + 1$, чиме је доказ завршен.

3. Означимо са A скуп позиција на којима су деца до којих се лопта низом сигурних додавања може проследити од Ивице, и означимо са B комплемент скупа A. Претпоставимо супротно, да је Маричина позиција у скупу B. Тада су и A и B непразни, па можемо уочити позиције $P_A \in A$ и $P_B \in B$ чије је растојање минимално. Пошто $P_A \in A$ а $P_B \in B$, између њих се не може сигурно додати лопта, што значи да се у кругу са пречником $P_A P_B$ налази бар још једна позиција P_C. Али било да $P_C \in A$ или $P_C \in B$, то је у контрадикцији са минималношћу растојања P_A и P_B.

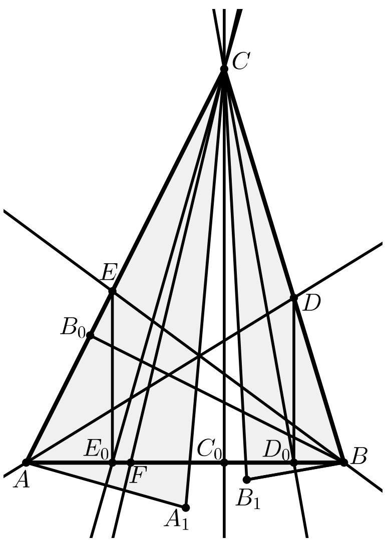
4. Ако важи $f(y_1) = f(y_2) = c$, тада за произвољно x и z имамо $y_1 = \frac{f(x+c+f(f(z)))}{f(1+f(c)(x+z))} = y_2$; одавде истовремено закључујемо да је f и „1-1“ и „на“, тј. f је бијекција. Сада уврштавањем $y = z = 1$ у једнакост из поставке и коришћењем инјективности функције f добијамо $x+f(1)+f(f(1)) = 1+f(f(1))(x+1)$, што се своди на $x(1-f(f(1))) = 1-f(1)$, а ово је могуће за свако $x \in \mathbb{R}^+$ само уколико важи $1-f(f(1)) = 0$, тј. $f(f(1)) = 1$; тада с десне стране добијамо $f(1) = 1$. Уврстимо сада $x = y = 1$ у једнакост из поставке, чиме добијамо (поново уз инјективност, као и уз $f(1) = 1$) $1+1+f(f(z)) = 1+1+z$, одакле следи $f(f(x)) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}^+$. Постављена једначина се своди на

$$f(x+f(y)+z) = yf(1+y(x+z)).$$

Заменом $x+z$ са x добијамо $f(x+f(y)) = yf(1+xy)$, тј. $\frac{f(x+f(y))}{y} = f(1+xy)$, али како су x и y на десној страни равноправни, ови изрази једнаки су и са $\frac{f(y+f(x))}{x}$. Сада уврштавањем $y = 1$ у $\frac{f(x+f(y))}{y} = \frac{f(y+f(x))}{x}$ добијамо $xf(x+1) = f(1+f(x))$, а заменом x са $f(x)$ у овој једнакости добијамо

$$f(x)f(f(x)+1) = f(1+f(f(x))) = f(1+x) = \frac{f(1+f(x))}{x}$$

(где смо на крају још једном искористили претходну једнакост). Одавде одмах добијамо $f(x) = \frac{1}{x}$, а директно се проверава да ова функција заиста задовољава услове задатка.



Оп 2017 4А 5

5. Означимо са B_0 и C_0 подножја висина из темена B и C у $\triangle ABC$, редом, и нека је F пресек симетрале $\measuredangle ACC_0$ са страницом AB. Важи:

$$\frac{AE_0}{E_0C_0} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} < \frac{AB}{BB_0} = \frac{AC}{CC_0} = \frac{AF}{FC_0}$$

(прва једнакост следи из Талесове теореме, претпоследња из сличности $\triangle ABB_0 \sim \triangle ACC_0$, а преостале две из познате пропорције у којој симетрала угла дели наспрамну страницу троугла). Одатле добијамо да је тачка E_0 између тачака A и F, што имплицира $\measuredangle ACE_0 < \measuredangle ACF$, а одатле даље $\measuredangle ACA_1 < \measuredangle ACC_0$. Ово значи да се $\triangle AA_1C$ цео налази, осим темена C, у отвореној полуравни с ивицом CC_0 у којој је тачка A. Аналогно се показује да се $\triangle BB_1C$ цео налази, осим темена C, у отвореној полуравни с ивицом CC_0 у којој је тачка B, одакле следи тврђење задатка.

Први разред – Б категорија

1. Подсетимо се, број $\overline{xyzu}$ је дељив са 11 ако и само ако $11 \mid (y+u)-(x+z)$.

Претпоставимо прво да су y и u исте цифре (a или b). Тада се услов своди на $11 \mid 2y-(x+z)$. Уколико важи $x = z$, тада имамо $11 \mid 2(y-x)$, а пошто су x и y цифре, ово је могуће само за $x = y = z = u$; дакле, у овом случају добијамо бројеве $\overline{aaaa}$ и $\overline{bbbb}$. Уколико су x и z различите цифре, тада је једна од њих једнака y а друга не; за нпр. $x = y$, $z \neq y$, услов се своди на $11 \mid y-z$, али ово је немогуће због $-8 \leqslant y-z \leqslant 8$ и $y \neq z$.

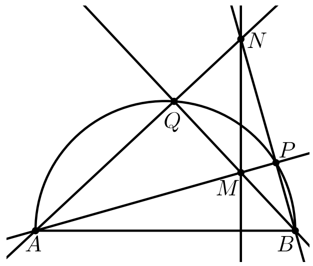
Нека су сада y и u различите цифре. Тада имамо $y+u = a+b$. За $x = z \in \{a, b\}$ услов $11 \mid (y+u)-(x+z)$ своди се на $11 \mid b-a$ или $11 \mid a-b$, али ово је немогуће за $a \neq b$. Следи да су и x и z различите цифре, па излиставањем свих могућих комбинација овде добијамо бројеве $\overline{aabb}$, $\overline{abba}$, $\overline{baab}$ и $\overline{bbaa}$.

2. Имамо $|A| = 50$ и $|B| = 33$, а како су у скупу $A \cap B$ управо бројеви дељиви са 6, имамо и $|A \cap B| = 16$. Даље, $B \cap C = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90\}$, па имамо $|B \cap C| = 10$, и $(A \cap C) \setminus B = \{14, 34, 44, 64, 74, 94\}$, па имамо $|(A \cap C) \setminus B| = 6$. Сада рачунамо

$$|(A \cup B) \setminus C| = |A \cup B| - |B \cap C| - |(A \cap C) \setminus B| = |A| + |B| - |A \cap B| - |B \cap C| - |(A \cap C) \setminus B| = 50 + 33 - 16 - 10 - 6 = 51,$$

одакле добијамо $|C| = 100 - |(A \cup B) \setminus C| = 49$.

3. Нека је p број плавих куглица, z број зелених куглица а c број црвених куглица. Из последњег услова закључујемо да важи $p+z = 7$ (јер 7 куглица није довољно како бисмо били сигурни да међу њима постоји црвена, тј. могуће је да свих 7 извучених куглица буду плаве или зелене, а није могуће извући 8 куглица које су све плаве или зелене). Слично, из претпоследњег услова закључујемо да важи $p+c = 9$. Коначно, из првог услова следи $z+c = 10$ (наиме, услов имплицира да важи једна од једнакости $p+z = 10$, $p+c = 10$ или $z+c = 10$, а прве две су немогуће због ранијих закључака). Сабирање све три добијене једнакости даје $2p+2z+2c = 26$, тј. $p+z+c = 13$, а одатле добијамо $c = 6$, $z = 4$ и $p = 3$.

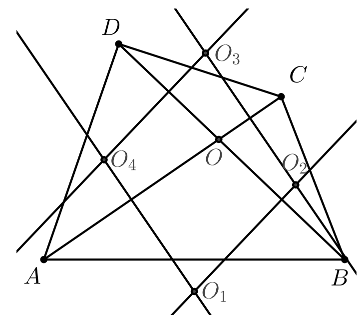


Оп 2017 1Б 4

4. Важи $\measuredangle APB = \measuredangle AQB = 90^\circ$ јер су то углови над пречником AB. Према томе, AP и BQ су висине у $\triangle ABN$, па је M његов ортоцентар. Но, тада је MN трећа висина тог троугла, па следи $MN \perp AB$.

5. Нека A сада има x година, а B нека има y година. Дакле, A је старији од B за $x-y$ година. Када је A имао y година, онда је B имао $y-(x-y)=2y-x$ година, па први услов из поставке можемо записати као $x=3(2y-x)$, што се своди на $2x=3y$. Када B буде имао x година, тада ће A имати $x+(x-y)=2x-y$ година, па други услов из поставке можемо записати као $2x-y+x=70$, тј. $3x-y=70$. Решавањем система добијамо $x=30$ и $y=20$.

Други разред – Б категорија



Оп 2017 2Б 1

1. Нека су O_1, O_2, O_3 и O_4 центри кружница описаних око $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$ и $\triangle DAO$, редом. Како и O_1 и O_2 припадају симетрали дужи BO, следи да је права O_1O_2 управо симетрала дужи BO, па добијамо $O_1O_2 \perp BO$, тј. $O_1O_2 \perp BD$. На исти начин показујемо и $O_3O_4 \perp BD$, па одавде следи $O_1O_2 \parallel O_3O_4$. Аналогно, $O_2O_3 \parallel O_1O_4$, па је $O_1O_2O_3O_4$ паралелограм.

2. Претпоставимо да је прва старчева реченица неистинита (и тада све остале морају бити истините). То значи да старац има паран број јабука, а из друге реченице следи да је број јабука које има дељив са 3. Дакле, у том случају је број јабука које старац има дељив са 6, али тада његова последња реченица није истинита, контрадикција. Према томе, прва старчева реченица мора бити истинита, што значи да старац има непаран број јабука. У том случају очигледно трећа реченица није истинита, па све остале морају бити истините, тј. број јабука мора бити непаран, дељив са 3, дељив са 5, а да није дељив са 6. Најмањи природан број који је дељив са 3 и 5 је број 15, а он очигледно испуњава и остале неопходне услове, па старац минимално може имати 15 јабука.

3. Ако је тражени број бар двоцифрен, тада се у његовом запису не смеју појављивати цифре из скупа $\{0,2,4,5,6,8\}$ (јер бисмо премештањем такве цифре на крај броја добили број који није прост). Дакле, остају само четири могуће цифре: $\{1,3,7,9\}$, па је тражени број највише четвороцифрен. Уколико би био четвороцифрен, тада би се свака од цифара 1, 3, 7 и 9 појављивала тачно једном, али тада бисмо пермутацијом цифара могли добити број 1397, који је дељив са 11 па није прост. Слично, за сваки могућ избор три од ове четири цифре можемо пронаћи њихову пермутацију у којој не добијамо прост број: $7 \mid 371$, $11 \mid 319$, $7 \mid 791$, $7 \mid 973$. Према томе, тражени број је највише двоцифрен, а међу њима лако налазимо највећи: то је 97 (он јесте прост, а једином могућом пермутацијом његових цифара добијамо број 79, који је такође прост).

4. Нека су x_1 и x_2 решења постављене једначине. Из Вијетових формула имамо $x_1+x_2=m+1$ и $x_1x_2=2m-4$. Према томе, следи
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m+1)^2-2(2m-4)=m^2-2m+9.$$
Функција m^2-2m+9 има минимум (теме) у тачки $m=\frac{-(-2)}{2}=1$ (и тада важи $x_1^2+x_2^2=8$). Пошто за $m=1$ једначина из поставке гласи $x^2-2x-2=0$ и њена решења су заиста реална (дискриминанта је позитивна: $(-2)^2+4\cdot 2=12>0$), решење задатка је $m=1$.

5. Сабирање прве две једначине из поставке даје $x^2+2y^2+z^2=25$, па коришћењем треће добијамо $x^2+2xz+z^2=25$, тј. $(x+z)^2=25$, а одавде следи $x+z=\pm5$, тј. $z=\pm5-x$. Сада из прве и треће једначине, користећи управо закључено, добијамо $9=x^2+y^2=x^2+xz=x^2+x(\pm5-x)=\pm5x$, тј. $x=\pm\frac{9}{5}$, а одавде следи $z=\pm5-(\pm\frac{9}{5})=\pm\frac{16}{5}$ и $y^2=xz=(\pm\frac{9}{5})\cdot(\pm\frac{16}{5})=\frac{144}{25}$. Дакле, посматрани систем има четири решења:
$$(x,y,z)\in\left\{\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right),\left(\frac{9}{5},-\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right),\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5},-\frac{16}{5}\right),\left(-\frac{9}{5},-\frac{12}{5},-\frac{16}{5}\right)\right\}.$$

Трећи разред – Б категорија

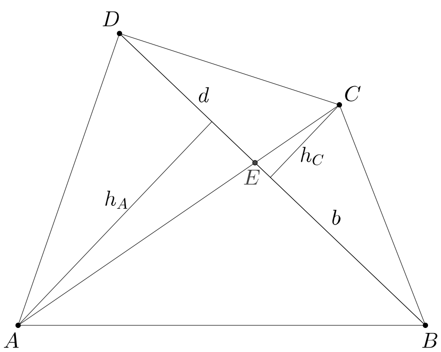
1. Из прве једнакости имамо $\sin x = 2\sin x\cos x$, тј. $\sin x(1-2\cos x)=0$, а одавде закључујемо $\sin x=0$ или $\cos x=\frac{1}{2}$. У првом случају имамо $x\in\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, а видимо да све ове вредности заиста испуњавају све једнакости из поставке. У другом случају имамо $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, но тада важи $\sin x\neq 0$ али $\sin 3x=\sin(\pm\pi+6k\pi)=0$, па није задовољен низ једнакости из поставке. Дакле, решење једначине је $x\in\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

2. Број различитих распореда једнак је броју парова ученика који су у међувремену заменили места, увећаном за 1 (због првог уоченог распореда). Како Вук мора престићи Аццу и Бојана, Дејан мора престићи Аццу, Бојана и Горана, а Горан мора престићи Бојана, број различитих распореда је бар 7. Уколико се престизања догађају по редоследу из претходне реченице, број различитих распореда ће бити једнак 7, па је то тражено решење задатка.

3. Множењем прве једначине са -2 и додавањем другој добијамо

$$0 = x^2 - 2xy + y^2 - 2(x-y) = (x-y)^2 - 2(x-y) = (x-y)(x-y-2),$$

одакле следи $x = y$ или $x = y + 2$. У првом случају друга једначина се своди на $2x^2 = 34$, па имамо два решења: $(x, y) = (\sqrt{17}, \sqrt{17})$ и $(x, y) = (-\sqrt{17}, -\sqrt{17})$. У другом случају друга једначина се своди на $2y^2 + 4y - 30 = 0$, тј. $y^2 + 2y - 15 = 0$, чијим решавањем добијамо $y = \frac{-2\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{-2\pm 8}{2}$, тј. $y = -5$ или $y = 3$, па добијамо још два решења: $(x, y) = (-3, -5)$ и $(x, y) = (5, 3)$, те постављени систем има укупно 4 решења.



Оп 2017 3Б 4

4. Нека је E пресек дијагонала четвороугла $ABCD$, нека су b и d дужине дужи BE и DE, и нека су h_A и h_C удаљености тачака A и C од праве BD, све респективно. Тада имамо:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABE}P_{\triangle BCE}P_{\triangle CDE}P_{\triangle ADE} &= \frac{bh_A}{2}\frac{bh_C}{2}\frac{dh_C}{2}\frac{dh_A}{2} \\ &= \left(\frac{bh_A}{2}\right)^2\left(\frac{dh_C}{2}\right)^2 = (P_{\triangle ABE}P_{\triangle CDE})^2. \end{aligned}$$

Стога, пошто је број у загради цео, посматрани производ је потпун квадрат. Међутим, потпун квадрат се може завршавати само неком од цифара 0, 1, 4, 5, 6 или 9, тј. не може се завршавати цифром 7, па се не може завршавати ни на 2017.

5. а) Видимо да $m^2n^2 \mid m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 = 2017$, одакле мора бити $mn = \pm 1$ или $mn = \pm 2017$ (јер је 2017 прост број). Ако би било $m = 2017$ или $n = 2017$, тада би лева страна једнакости била дељива са 2017^2, док десна није, па је то контрадикција. Према томе, $mn = \pm 1$, али онда $m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 = 1$, па једначина нема решења.

b) Узмимо, без губљења општости, $|m| \geqslant |n|$. Тада имамо $2016 = m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 \geqslant n^2n^6 + m^4n^2(m^2 - n^2) \geqslant n^8$, што даје $|n| \leqslant 2$. За $n = 0$ лева страна је 0, па ту немамо решења. За $|n| = 1$, из $m^2 - m^4 + m^6 = 2016$ следи да m мора бити парно, а такође и дељиво са 3 (јер би у случају $m \equiv \pm 1 \pmod 3$ лева страна давала остатак 1 при дељењу са 3, док $3 \mid 2016$), одакле следи $|m| \geqslant 6$ (немогуће је $m = 0$), а то је контрадикција због

$$m^6 - m^4 + m^2 = m^4(m^2 - 1) + m^2 \geqslant 35m^4 \geqslant 35 \cdot 6^4 > 2016.$$

Коначно, за $|n| = 2$ једначина постаје $64m^2 - 16m^4 + 4m^6 = 2016$, тј. $16m^2 - 4m^4 + m^6 = 504$, одакле је m паран број, али тада $64 \mid 16m^2 - 4m^4 + m^6$ док $64 \nmid 504$, што је контрадикција. Дакле, постављена једначина нема решења.

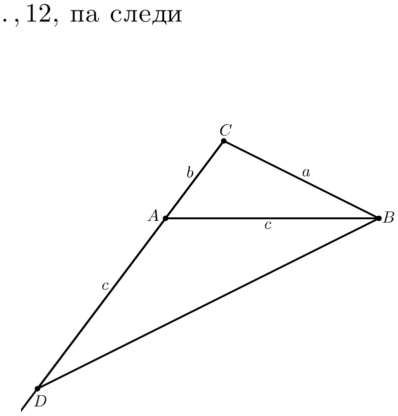
Четврти разред – Б категорија

1. На посматраном интервалу важи $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, па следи $(\sin x)^{\cos x} \leqslant 1^{\cos x} = 1$. Ова вредност се заиста и достиже за $x = \frac{\pi}{2}$, па тражена максимална вредност једнака 1.

2. Ако је x тражени број, тада из услова задатка следи да је $x - 1$ дељиво са $2, 3, \ldots, 12$, па следи

$$27720 = \text{НЗС}(2, 3, \ldots, 12) \mid x - 1.$$

Другим речима, $x = 27720k + 1$ за неки природан број k. Увршатавањем $k = 1, 2, 3 \ldots$ до наиласка на први случај када је x дељиво са 13 видимо да се то догађа за $k = 3$, и тада имамо $x = 27720 \cdot 3 + 1 = 83161$.



Оп 2017 4Б 3

3. Уочимо тачку D такву да важи $C - A - D$ и $AD = c$. Тада имамо $CD = b + c$, а како из једнакости дате у поставци следи $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, ово заједно с једнакошћу $\measuredangle ACB = \measuredangle BCD$ имплицира $\triangle ABC \sim \triangle BDC$. Из те сличности имамо $\measuredangle BDC \cong \measuredangle ABC$. Како важи $\measuredangle ABD \cong \measuredangle BDC$ (због $AD \cong AB$), добијамо $\measuredangle BAC = \measuredangle ABD + \measuredangle BDC = 2\measuredangle BDC = 2\measuredangle ABC$, што је и требало доказати.

4. Сабирањем све 3 једначине добијамо $(x+y+z)^2 = 4$, тј. $x+y+z = \pm 2$. Одузимањем треће једначине од прве добијамо $x^2 - z^2 + 2y(z - x) = 0$, тј. $(x - z)(x + z - 2y) = 0$. Даље разликујемо четири случаја.

- $x+y+z=2$, $x-z=0$:
  Заменом $z=x$ и $y=2-2x$ у прву једначину добијамо $-3x^2+4x-1=0$, чијим решавањем добијамо 2 решења: $(x,y,z)=(1,0,1)$ или $(x,y,z)=(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$.
- $x+y+z=-2$, $x-z=0$:
  Заменом $z=x$ и $y=-2-2x$ у прву једначину добијамо $-3x^2-4x-1=0$, чијим решавањем добијамо још 2 решења: $(x,y,z)=(-1,0,-1)$ или $(x,y,z)=(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$.
- $x+y+z=2$, $x+z=2y$:
  Одавде следи $3y=2$ и онда $x+z=2y=\frac{4}{3}$, а из друге једначине из поставке добијамо $xz=\frac{2-y^2}{2}=\frac{7}{9}$. Када овде уврстимо $z=\frac{4}{3}-x$, добијамо $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{7}{9}=0$, а за дискриминанту ове једначине имамо $D=\frac{16}{9}-\frac{28}{9}=-\frac{4}{3}<0$, па овде нема реалних решења.
- $x+y+z=-2$, $x+z=2y$:
  Одавде следи $3y=-2$ и онда $x+z=2y=-\frac{4}{3}$, а из друге једначине из поставке добијамо $xz=\frac{2-y^2}{2}=\frac{7}{9}$. Када овде уврстимо $z=-\frac{4}{3}-x$, добијамо $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{7}{9}=0$, а за дискриминанту ове једначине имамо $D=\frac{16}{9}-\frac{28}{9}=-\frac{4}{3}<0$, па ни овде нема реалних решења.

Дакле, посматрани систем има четири реална решења: $(x,y,z)\in\{(1,0,1),(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}),(-1,0,-1),(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})\}$.

5. Приметимо да за све могуће збирове осим 6 постоји комбинација од три броја с тим збиром таква да је на основу њиховог производа могуће једнозначно реконструисати та три броја: $18=6+6+6$, $17=6+6+5$, $16=6+5+5$, $15=5+5+5$, $14=5+5+4$, $13=5+5+3$, $12=5+5+2$, $11=5+5+1$, $10=4+4+2$, $9=3+3+3$, $8=5+2+1$, $7=5+1+1$, $5=3+1+1$, $4=2+1+1$ и $3=1+1+1$. Примера ради, ако би Зорану био саопштен збир 14, тада је један од начина на који је могуће добити тај збир $5+5+4$, а тада би Петру био саопштен производ 100, и у том случају би Петар одмах знао сва три Анина броја (једини начин да се 100 представи као производ три природна броја од 1 до 6 је управо $5\cdot5\cdot4$: заиста, како $5^2\mid100$, следи да два од та три броја морају бити једнаки 5, а трећи онда мора бити 4). Како је Зоран био сигуран да Петар не може на основу свог производа реконструисати Анине бројеве, једини начин да Зоран буде сигуран у то јесте да му је саопштен управо збир 6.

Ово значи да је Ана добила једну од следеће три тројке бројева: $(4,1,1)$, $(3,2,1)$ или $(2,2,2)$. У првом случају Петар би имао производ 4 и двоумио би се између тројки $(4,1,1)$ и $(2,2,1)$; у другом случају Петар би имао производ 6 и двоумио би се између тројки $(3,2,1)$ и $(6,1,1)$; у трећем случају Петар би имао производ 8 и двоумио би се између тројки $(4,2,1)$ и $(2,2,2)$. Како је Петар изјавио да није знао ни који је најмањи Анин број, тиме су прва два случаја елиминисана, па остаје трећи. Дакле, Ана је у три бацања сваки пут добила број 2.