Регата

Младшая лига

Первый тур

1a. Положительные числа x и y таковы, что $x^2 - xy = 7$ и $3xy + y^2 = 29$. Чему может быть равно $x + y$?

Ответ: 6.

Заметим, что квадрат суммы чисел x и y равен 36:

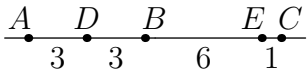
$$36 = 29 + 7 = (x^2 - xy) + (3xy + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

Поскольку числа положительны, сумма $x+y$ не может быть отрицательным числом, поэтому она равна 6. □

1g. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D, E так, чтобы расстояния между ними в сантиметрах оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$?

Ответ: Да.

Пример изображен на картинке ниже.



□

1c. В ряд стоят 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек при этом могут быть выше своего правого соседа?

Ответ: 34.

Левого соседа имеют 49 человек, 34 из них ниже своего левого соседа. Для этих самых соседей (и только для них) как раз таки и верно, что каждый из них выше своего правого соседа. □

Второй тур

2a. Найдите все простые числа p, q и r, такие что число $p^4 + q^4 + r^4 - 3$ тоже простое.

Ответ: тройка чисел $(2, 3, 5)$ и все ее перестановки.

Пусть $s = p^4 + q^4 + r^4 - 3$ — простое число. $s > 2^4 - 3 = 13$, поэтому s нечетно и $s \neq 3$. Если $p = q = r$, то s делится на 3 и является составным.

Поскольку s нечетно, ровно одно из чисел p, q и r равно 2. Пусть для определенности $r = 2$. Предположим, что ни одно из чисел p и q не делится на 3. Поскольку квадраты чисел, не делящихся на 3, дают остаток 1 при делении на 3, s кратно 3 и, значит, составное. Поэтому одно из (простых) чисел p,q делится на 3, т. е. равно 3, для определенности можно считать, что $q = 3$. Таким образом, осталось найти все простые числа p, для которых число $s = p^4 + 3^4 + 2^4 - 3 = p^4 + 94$ является простым. Если p не делится на 5, то p^4 дает остаток 1 при делении на 5, и значит, число $s = p^4 + 94$ составное, поскольку делится на 5. Поэтому $p = 5$. Осталось заметить, что число $s = 5^4 + 94 = 719$ является простым. □

2g. На сторонах BC и AB треугольника ABC нашлись точки L и K соответственно такие, что AL — биссектриса угла BAC, $\angle ACK = \angle ABC$, $\angle CLK = \angle BKC$. Докажите, что $AC = KB$.

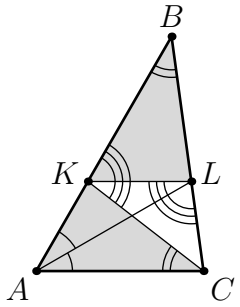


Рис. 1: к решению задачи 2g.

Заметим, что в треугольниках BLK и CKA две пары углов совпадают. Действительно, $\angle LBK = \angle ACK$ по условию; углы BLK и AKC смежны с равными по условию углами. Поэтому и третья пара углов — BKL и BAC — равны. Отсюда $KL \parallel AC$. Следовательно, треугольник LKA — равнобедренный, $LK = KA$, и тогда треугольники BLK и CKA равны (рис. 1). Тогда $BK = AC$ как соответственные стороны. □

2c. 2017 различных натуральных чисел таковы, что сумма любых двух различных из них не равна ни одному из оставшихся. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

Ответ: 4032.

Легко понять, что множество чисел $\{2016, 2017, 2018, \ldots, 4032\}$ подходит под условие. Упорядочим наши числа: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2017}$. Обозначим наибольшее из них, a_{2017}, за M. По условию никакие два различных a_i и a_j не дают в сумме M.

Если M нечётно, то в каждой паре $(1, M-1)$, $(2, M-2)$, …, $(\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2})$ не более одного равно какому-то из a_i. Т.к. всего чисел a_i (кроме M)

ровно 2016, получаем оценку $\frac{M-1}{2} \geqslant 2016$, откуда $M \geqslant 4033$.

Если M чётно, то в каждой паре $(1, M-1)$, $(2, M-2)$, $\ldots$, $(\frac{M}{2}-1, \frac{M}{2}+1)$ не более одного равно какому-то из a_i, к тому же, $\frac{M}{2}$ может быть равно одному из них. Т.к. всего чисел a_i (кроме M) ровно 2016, получаем оценку $\frac{M}{2} \geqslant 2016$, откуда $M \geqslant 4032$.

Итак, в обоих случаях мы имеем $M \geqslant 4032$. □

Третий тур

3a. Сумма чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ равна 0. Известно, что

$$|x_1 - 2x_2| = |x_2 - 2x_3| = \ldots = |x_{2016} - 2x_{2017}| = |x_{2017} - 2x_1|\,.$$

Докажите, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2017} = 0$.

Пусть $x_1 - 2x_2 = a$. Тогда $x_1 - 2x_2 = \pm a$, $x_2 - 2x_3 = \pm a$, $\ldots$, $x_{2016} - 2x_{2017} = \pm a$, $x_{2017} - 2x_1 = \pm a$. Сложим эти равенства. Слева получим сумму $-(x_1 + \ldots + x_{2017})$, равную 0 по условию. Справа же мы получим $(\pm 1 \pm 1 \ldots \pm 1)a = ka$, где k — нечетное число, т. к. это сумма нечетного количества нечетных чисел. Следовательно, $k \neq 0$, поэтому $a = 0$. Таким образом,

$$x_1 - 2x_2 = x_2 - 2x_3 = \ldots = x_{2016} - 2x_{2017} = x_{2017} - 2x_1 = 0\,.$$

Если $x_1 = 0$, то, очевидно, и остальные числа равны нулю. Если $x_1 > 0$, то остальные числа также будут больше 0, и их сумма не будет равна 0. Аналогично она не может равняться 0, если $x_1 < 0$. □

3g. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, причем $BC = AO$. Точка F такова, что $CF \perp CD$ и $CF = BO$. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный.

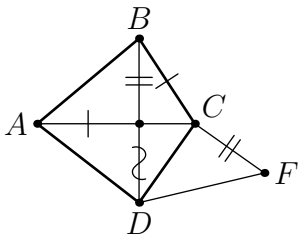


Рис. 2: к решению задачи 3g.

Есть две точки F, удовлетворяющие условию (рис. 2). Докажем, что в обоих случаях $AD = DF$. По теореме Пифагора для треугольника FDC имеем

$$DF^2 = FC^2 + CD^2 = OB^2 + CD^2\,.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора для треугольников AOD, DOC, BOC

$$AD^2 = AO^2+OD^2 = BC^2+(CD^2-OC^2) = (BC^2-OC^2)+CD^2 = OB^2+CD^2\,.$$

□

3c. Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его.

Предположим противное. Пусть игроков было n. Если один из них выиграл у троих человек, то либо два из них младше его, либо два из них старше его и, значит, нужный игрок найден. Поэтому нам осталось разобрать случай, когда каждый теннисист проиграл по крайней мере две партии, и значит, суммарное количество поражений не меньше $2n$.

Заметим, что суммарное по всем игрокам количество побед плюс суммарное количество поражений равно $4n$ (поскольку каждый сыграл 4 партии). Если кто-то проиграл хотя бы три партии, то общее количество побед строго меньше $2n$, что невозможно, поскольку суммарное количество побед равно суммарному количеству поражений. Стало быть, каждый участник обыграл двух человек.

Осталось рассмотреть самого старшего из игроков — он обыграл двух человек, и они оба младше него. □

Четвертый тур

4a. Даны 11 натуральных чисел таких, что не существует простого числа, на которое каждое из них делится. Известно, что произведение любых шести из этих чисел делится на произведение пяти оставшихся. Докажите, что произведение всех 11 чисел — точный квадрат.

Выберем любое простое число p, на которое делится произведение всех данных чисел. По условию найдется число c, не кратное p. Разобьем оставшиеся числа на две группы по 5 чисел в каждой и обозначим произведения чисел в этих группах a и b. Из условия следует, что ac делится на b и bc делится на a. Это означает, что p входит в разложение чисел a и b в равных степенях, поскольку в разложение c оно вообще не входит. Следовательно, в произведение всех чисел (равное abc) простое число p входит в четной степени. Т. к. это верно для всех простых множителей произведения, то оно является точным квадратом. □

4g. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка P такая, что $2AP = BC$. Точки X и Y симметричны точке P относительно вершин A и C. Оказалось, что $BX = BY$. Чему равен угол C исходного треугольника?

Ответ: $60°$.

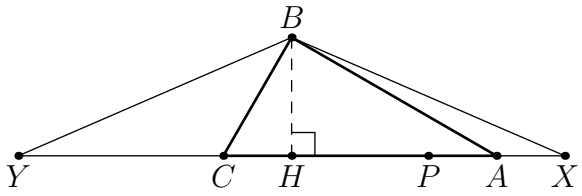


Рис. 3: к решению задачи 4g.

Опустим перпендикуляр BH на сторону AC (рис. 3). Поскольку $BX = BY$, то точка H — середина XY. Тогда

$$CH = YH - CY = \frac{XY}{2} - CP = AC - CP = AP = \frac{BC}{2}.$$

Следовательно, в прямоугольном треугольнике BCH катет CH вдвое короче гипотенузы BC, поэтому $\angle C = 60°$. □

Другое решение. Пусть $AP = a$, $CP = c$, тогда $XY = 2a + 2c$. Отметим

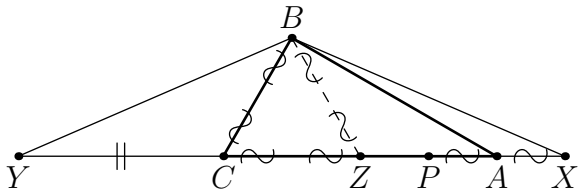


Рис. 4: к другому решению задачи 4g.

точку Z на отрезке XY так, что $XZ = c$ (рис. 4). Тогда $ZC = XY - 2c = 2a = BC$. С другой стороны, из симметрии ($XZ = CY$) ясно, что $BC = BZ$. Следовательно, треугольник BCZ равносторонний. □

4c. В каждой клетке таблицы 2017×2017 стоят числа 1 или -1. Пусть x_i — произведение чисел в i-ой строке, а y_j — произведение чисел в j-ом столбце. Может ли так оказаться, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017} + y_1 + \ldots + y_{2017} = 0$?

Ответ: Нет.

Предположим противное. Пусть X — количество чисел среди $x_1, \ldots, x_{2017}$, равных -1, а Y — количество чисел среди $y_1, \ldots, y_{2017}$, равных -1. Тогда $X + Y = 2017$, то есть X и Y имеют разную четность, то есть

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_{2017} \neq y_1 \cdot y_2 \cdot y_{2017}\,.$$

С другой стороны, оба произведения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2017}$ и $y_1 \cdot \ldots \cdot y_{2017}$ равны произведению всех чисел таблицы. Противоречие. $\square$

Старшая лига

Первый тур

1a. Числа $\sin 17^\circ$ и $\sin 73^\circ$ являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $a^2 + 2ac = b^2$.

Пусть $x_1 = \sin 17^\circ$ и $x_2 = \sin 73^\circ$. Так как $\sin 73^\circ = \cos 17^\circ$, то по основному тригонометрическому тождеству $x_1^2 + x_2^2 = \sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ = 1$. С другой стороны, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ по теореме Виета. Следовательно,

$$1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-b/a)^2 - 2c/a = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Умножив полученное равенство $\frac{b^2-2ac}{a^2} = 1$ на a^2 и перенеся $2ac$, получим требуемое. $\square$

1g. AD — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Точка E симметрична точке A относительно середины BC. Докажите, что $DE \perp BC$.

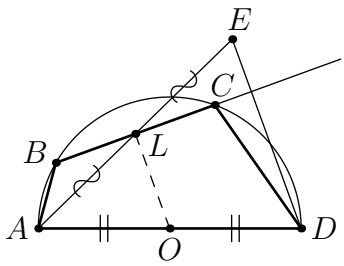


Рис. 5: к решению задачи 1g.

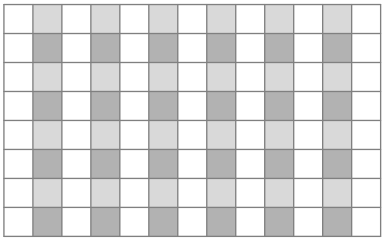
Пусть O — центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, а L — середина стороны BC (рис. 5). Поскольку треугольник OBC равнобедренный, то $OL \perp BC$. Так как $AO = OD$ и $AL = LE$, то OL — средняя линия в треугольнике AED. Отсюда получаем искомую перпендикулярность. $\square$

1c. Саша отметил несколько клеток таблицы 8×13 так, что в любом квадратике 2×2 оказалось нечетное число отмеченных клеток. Затем он отметил еще несколько клеток, в результате чего в каждом квадрате 2×2 стало четное

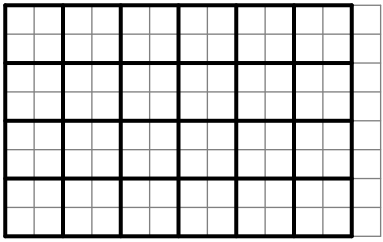
число отмеченных клеток. Какое наименьшее суммарное число клеток могло быть отмечено Сашей?

Ответ: 48 клеток.

Пример. Покрасим таблицу «зеброй» вдоль четной стороны и возьмем цвет, который в меньшинстве. Пусть на первом шаге Саша отметит в каждой полосе каждую вторую из выбранных клеток, а на втором — отметит остальные клетки данного цвета.



Оценка. Возьмем 24 непересекающихся квадрата 2×2, как показано на рисунке. В каждом из них не менее двух отмеченных клеток, значит, всего отмеченных клеток не менее 48.



□

Второй тур

2а. Докажите, что значение выражения

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]$$

четно при любом натуральном n.

Докажем утверждение индукцией по n. Для $n=1$ утверждение очевидно. Докажем переход. Пусть d — количество делителей числа $n+1$. Рассмот-

рим разность выражений для n и $n+1$:

$$\left[\frac{n+1}{1}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]+\left[\sqrt{n+1}\right]-$$
$$-\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]\right)=$$
$$=\left(\left[\frac{n+1}{1}\right]-\left[\frac{n}{1}\right]\right)+\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\left[\frac{n+1}{n+1}\right]-\left[\frac{n}{n+1}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{n+1}\right]-\left[\sqrt{n}\right]\right).$$

Заметим, что разность $\left[\frac{n+1}{i}\right]-\left[\frac{n}{i}\right]$ равна 1, если i является делителем числа $n+1$, и равна 0 в противном случае. Таким образом, разность равна $d+\left(\left[\sqrt{n+1}\right]-\left[\sqrt{n}\right]\right)$. Если $n+1$ не является квадратом числа, то d четно (поскольку все его делители разбиваются на пары, произведение внутри которых равно n) и $\left[\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{n}\right]$, поэтому разность равна d, то есть четному числу.

Если же $n+1$ — это квадрат, то d нечетно (поскольку все делители, кроме $\sqrt{n+1}$ разбиваются на пары) и $\left[\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{n}\right]+1$, поэтому разность равна $d+1$, то есть четному числу. В обоих случаях переход доказан. □

2g. Центр I вписанной окружности остроугольного треугольника ABC лежит на биссектрисе острого угла между высотами AA_1 и CC_1. Пусть L — основание биссектрисы угла B треугольника ABC. Докажите, что точки A_1, I, L, C лежат на одной окружности.

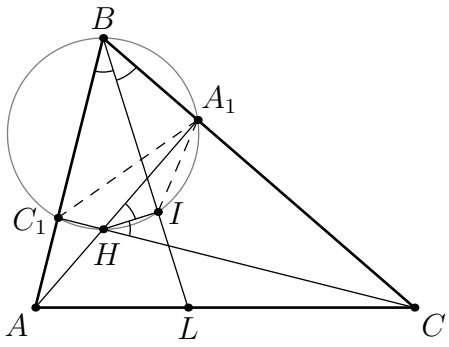


Рис. 6: к решению задачи 2g.

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда $\angle A_1HC=\angle B$ (так как четырехугольник BA_1HC_1 вписанный), поэтому $\angle A_1BI=\angle A_1HI=\angle B/2$ (рис. 6). Отсюда точки B, A_1, I, H лежат на одной окружности с диаметром BH. На этой же окружности, очевидно, лежит точка C_1. Тогда $\angle A_1IB=\angle A_1C_1B=\angle ACB$ (последнее равенство верно в силу то-

го, что четырехугольник AC_1A_1C вписанный), откуда $\angle A_1IL + \angle ACB = 180°$. □

2c. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке, пока все карточки не будут разобраны. Костя берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Виталик хочет этому помешать. Сможет ли Костя добиться своей цели?

Ответ: Костя сможет добиться своей цели.

В этой задаче неважно, как расположены карточки. Пусть карточки расположены в виде таблицы 2×25: в первой строке выложены карточки с числами от 1 до 25 по возрастанию, а под ними во второй строке — карточки с числами от 26 до 50 тоже по возрастанию.

Наблюдая за игрой, будем говорить, что столбец в этой таблице *неполный*, если из него взята одна карточка, и *полный* — если обе карточки еще не взяты. Заметим, что числа, стоящие в одном столбце, отличаются на 25 и поэтому дают одинаковые остатки при делении на 25.

Выигрышная стратегия Кости состоит в том, чтобы взять из каждого столбца ровно одну карточку. Тогда сумма чисел на Костиных карточках будет иметь такой же остаток при делении на 25, как и сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + 24 + 0 = 300$ т. е. будет делиться на 25. Значит, Костя выиграет.

Следовать этой стратегии совсем нетрудно. Первым ходом Костя берет карточку из любого столбца и запоминает, что больше из этого столбца он карточек брать не будет. Таким образом, перед ходом Виталика на столе имеется ровно один неполный столбец, причем карточку из него взял Костя. После того как Виталик сделает свой ход, на столе будет не более двух неполных столбцов. Точнее говоря, не будет ни одного неполного столбца, если Виталик возьмет карточку из неполного столбца, либо будет ровно два неполных столбца, если Виталик возьмет карточку из какого-то полного столбца. В первом случае Костя возьмет карточку из любого столбца, во втором случае — из того, где только что взял карточку Виталик. В обоих случаях после Костиного хода на столе остался ровно один неполный столбец, из которого Костя уже брал карточку. Ситуация повторилась. Играя таким образом дальше, Костя добьется своей цели. □

Третий тур

3a. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что для любого его простого делителя p число n делится на $p - 1$, но не делится на p^2.

Ответ: $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$.

Заметим, что число 1806 подходит: оно делится на каждое из чисел $1, 2, 6, 42$, но не делится ни на одно из чисел $2^2, 3^2, 7^2, 43^2$.

Предположим, существует $n > 2\cdot3\cdot7\cdot43$, подходящее под условие. Хотя бы одно из чисел p и $p-1$ является четным, поэтому и n четно. Значит, у него есть простой делитель 2 (и n не делится на 2^2). Пусть $p > 2$ — его следующий по величине простой делитель, и $n = 2pk$, где у числа k все простые делители больше p. По условию число $2pk$ делится на $p-1$, но pk взаимно просто с $p-1$ (т. к. все его простые делители больше $p-1$), поэтому 2 делится на $p-1$, и $p = 3$ (и n не делится на 3^2).

Пусть $q \geqslant 5$ — следующий по величине простой делитель, и $n = 6ql$, где у числа l все простые делители больше q. По условию число $6ql$ делится на $q-1$, но ql взаимно просто с $q-1$ (т. к. все его простые делители больше $q-1$), поэтому 6 делится на $q-1 \geqslant 4$, и $q = 7$ (и n не делится на 7^2).

Пусть $r \geqslant 11$ — следующий по величине простой делитель, и $n = 42rt$, где у числа t все простые делители больше r. По условию число $42rt$ делится на $r-1$, но rt взаимно просто с $r-1$ (т. к. все его простые делители больше $r-1$), поэтому 42 делится на $r-1 \geqslant 10$. Число r — простое и равно делителю 42, увеличенному на 1, который больше 10. Следовательно, $r = 43$ (и n не делится на 43^2).

Пусть $s \geqslant 47$ — следующий по величине простой делитель, и $n = 42\cdot43sm$, где у числа m все простые делители больше s. По условию число $42\cdot43sm$ делится на $s-1$, но sm взаимно просто с $s-1$ (т. к. все его простые делители больше $s-1$), поэтому $42\cdot43$ делится на $s-1 \geqslant 46$. Число s — простое и равно увеличенному на 1 четному делителю числа 1806 (этот делитель больше 43 и четен, т. к. s нечетно). У этого числа таких делителей всего четыре: $2\cdot43 = 86$, $2\cdot3\cdot43 = 258$, $2\cdot7\cdot43 = 602$, $2\cdot3\cdot7\cdot43 = 1806$. Но все эти числа, увеличенные на 1, составные: 87 и 603 делятся на 3, 259 делится на 7, 1807 делится на 13. Противоречие. □

3g. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Оказалось что точки, симметричные P относительно середины стороны BC и биссектрисы угла A, лежат на одной прямой с точкой A. Докажите, что основания перпендикуляров из P на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC.

Пусть M — середина стороны BC, X, Y, Z — проекции точки P на стороны AB, AC и биссектрису угла A соответственно (рис. 7). Сделаем гомотетию с центром в точке P и коэффициентом $1/2$. Получим, что точки M, Z и середина AP (обозначим ее за N) лежат на одной прямой. Заметим, что точки A, P, X, Y, Z лежат на окружности с диаметром AP, причем точка Z является серединой дуги XPY этой окружности, поэтому точки N и Z лежат на серединном перпендикуляре к отрезку XY. Отсюда точка M также лежит на серединном перпендикуляре к XY, то есть $MX = MY$. □

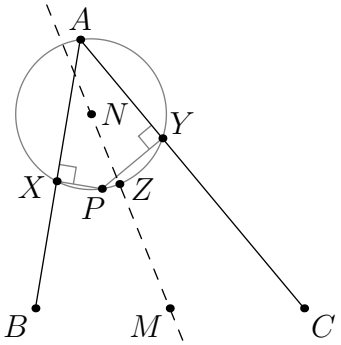


Рис. 7: к решению задачи 3g.

3c. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов авиарейсами так, чтобы от любого города можно было бы долететь (возможно, с пересадками) до любого другого и чтобы для любых четырех городов A, B, C, D, для которых есть рейсы AB, BC, CD, был и рейс AD. Сколько существует способов это сделать?

Ответ: 2^{99} способов.

Заметим, что из любого города до любого другого можно долететь с не более чем одной пересадкой. Действительно, из условия следует, что любой пусть с двумя и более пересадками можно сократить. Рассмотрим произвольный город A. Города, в которые ведут рейсы из A, назовем *ближними*, а остальные города — *дальними*. Рассмотрим произвольный дальний город D. Как мы выяснили, он соединен с одним из ближних городов B_1. Для любого другого ближнего города B_2, рассматривая маршрут $B_2{-}A{-}B_1{-}D$, видим, что D и B_2 также соединены. Значит, любой дальний город соединен с любым ближним. Назовем город A также дальним, указанное свойство сохранится. Получим, что все города разбиты на две непустые группы, города из разных групп соединены попарно. Если больше рейсов нет, то такая система рейсов подходит, и выбрать ее можно $2^{99} - 1$ способами (если зафиксируем город A, любой из остальных городов должен быть либо дальним, либо ближним, при этом запрещено лишь, чтобы все города были дальними). Если же есть хотя бы один рейс между городами одной группы, то несложно видеть, что в этом случае любые два города соединены рейсом. Такая система рейсов также подходит. Итого, $2^{99} - 1 + 1 = 2^{99}$. $\square$

Четвертый тур

4a. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{1962}{2018}} < \frac{1963}{1964} \cdot \frac{1965}{1966} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2018} < \sqrt{\frac{1963}{2019}}.$$

Заметим, что при $0 < m < n$ верно $1 - \frac{1}{m+1} < 1 - \frac{1}{n+1}$, что означает $\frac{m}{m+1} < \frac{n}{n+1}$.

Пусть $A = \frac{1963}{1964} \cdot \frac{1965}{1966} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2018} > 0$. По доказанному выше имеем

$$A > \frac{1962}{1963} \cdot \frac{1964}{1965} \cdot \ldots \cdot \frac{2016}{2017}.$$

Следовательно,

$$A^2 > \frac{1963}{1964} \cdot \frac{1965}{1966} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2018} \cdot \frac{1962}{1963} \cdot \frac{1964}{1965} \cdot \ldots \cdot \frac{2016}{2017} = \frac{1962}{2018},$$

откуда $A > \sqrt{\frac{1962}{2018}}$.

Аналогично доказывается и второе неравенство: $A < \frac{1964}{1965} \cdot \frac{1966}{1967} \cdot \ldots \cdot \frac{2018}{2019}$, поэтому $A^2 < \frac{1963}{2019}$, и $A < \sqrt{\frac{1963}{2019}}$. □

4g. На биссектрисе угла A треугольника ABC внутри треугольника нашлась такая точка L, что $\angle LBC = \angle LCA = \angle LAB$. Докажите, что длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию.

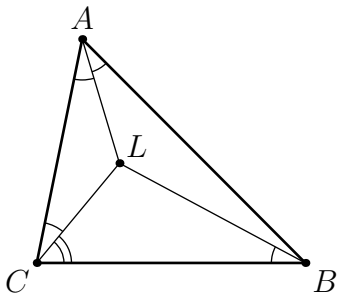


Рис. 8: к решению задачи 4g.

Рис. 8. Пусть $\angle LBC = \alpha$, $\angle LCB = \beta$. Тогда $\angle CLB = 180^\circ - \alpha - \beta$. По теореме синусов для треугольников LBC и LCA

$$\frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{LC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}.$$

По теореме синусов для треугольника ABC

$$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}.$$

Объединив эти два равенства, получим $BC : AC = AB : BC$. $\square$

Другое решение. Рис. 9. Отметим на луче AL за точкой L такую точку

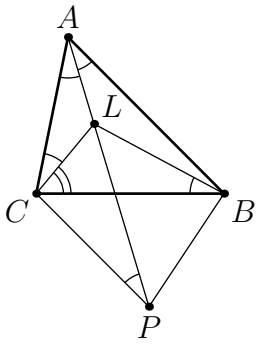


Рис. 9: к другому решению задачи 4g.

P, что $PC = CA$. Заметим, что $\angle ACP = \pi - 2\angle CAL = \angle ACB + \angle ABC$, поэтому точки P и A лежат по разные стороны относительно прямой BC и $\angle PCB = \angle ABC$.

Поскольку $\angle CPL = \angle CAL = \angle LBC$, то четырехугольник $CLBP$ вписанный и

$$\angle CBP = \angle CLP = \angle ACL + \angle CAL = \angle CAB.$$

Значит, треугольники ABC и BCP подобны и $CB/AB = CP/BC = AC/CB$. $\square$

Ещё решение. Рис. 10. Отметим точку L', изогонально сопряженную точ-

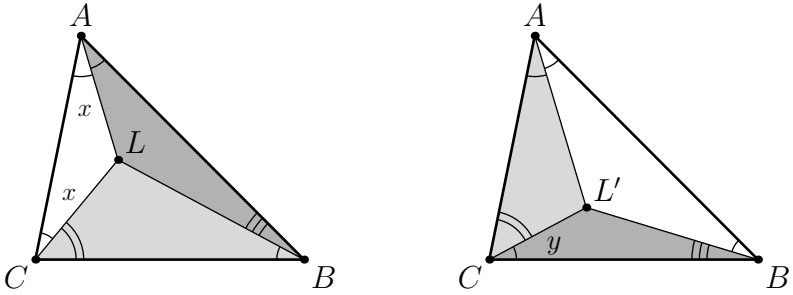


Рис. 10: к еще одному решению задачи 4g.

ке L (вторую точку Брокара). Ясно, что она лежит на той же биссектрисе. Кроме того, из равенства углов следуют подобия треугольников: $\triangle ALB \sim \triangle CL'B$ и $\triangle BLC \sim \triangle AL'C$. Пусть $AL = LC = x$ и $CL' = y$. Тогда из указанных подобий следует соответственно $AB : x = BC : y$ и $BC : x = AC : y$. Отсюда получаем требуемое. $\square$

4c. Дана таблица 2017×2017, в каждой клетке стоит «+» или «−». За одну операцию разрешается поменять все знаки в кресте на противоположные (крест — объединение произвольного столбца и произвольной строки). Верно ли, что из любого начального расположения можно получить таблицу со всеми плюсами?

Ответ: Нет.

Раскрасим всю таблицу в шахматном порядке. Если угловая клетка черная, то в любом кресте белых клеток будет четное число. Рассмотрим начальную позицию, где во всех клетках стоят минусы, а в одной белой стоит плюс, тогда после применения операции четность количества плюсов на белых клетках не изменится. Изначально плюс только один, нечетное число, а в таблице со всеми плюсами их количество четное. Противоречие. $\square$

Геометрия

Младшая лига

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BD угла B. Перпендикуляр к BD в точке D пересекает прямую BC в точке E. Найдите BE, если $CD = d$. *(А. А. Егоров)*

Ответ: $2d$.

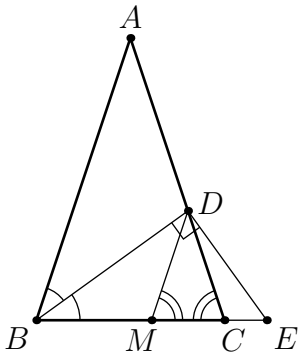


Рис. 1: к решению задачи 1.

Проведем в прямоугольном треугольнике BDE медиану DM (рис. 1). Тогда $MB = MD = ME$. Поскольку треугольник BMD равнобедренный, то $\angle MDB = \angle MBD = \angle DBA$, следовательно, $DM \parallel AB$ и $\angle DMC = \angle ABC = \angle ACB$. Значит и треугольник DMC равнобедренный, т. е. $DM = DC = d$. Отсюда получаем, что $BE = 2DM = 2d$. □

2. Бильярдный стол имеет форму *параллелограмма.* Два шара, поставленные у середины одного из бортов, ударили так, что они отразились от разных соседних бортов, после чего оба попали в одну и ту же точку на противоположном борте. Один шар прошел до отскока вдвое большее расстояние, чем после. Найдите отношение длин отрезков пути до и после отскока для другого шара. *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: $2 : 3$.

Пусть A — точка старта шаров, а B — точка, куда они попадают, и пусть расстояния от A до бортов, в которые ударяются шары, равно a. Поскольку по закону отражения угол между бортом стола и траекторией шара до удара о него равен аналогичному углу после удара, то длины отрезков траектории до и после удара пропорциональны расстояниям от точек A и B до этого борта. Поэтому расстояние от точки B до борта, от которого отразился первый шар, равно $a/2$, а до противоположного борта — $3a/2$

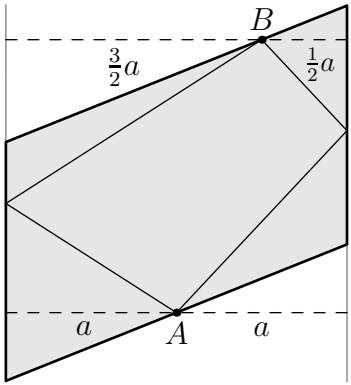


Рис. 2: к решению задачи 2.

(рис. 2). Следовательно, отношение отрезков пути второго шара равно $a : \frac{3a}{2} = 2 : 3$. □

3. На отрезке AB по разные стороны от него построены правильный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD, в котором $\angle ABD = 90°$, $\angle BAD = 30°$. Описанная окружность первого треугольника пересекает медиану DM второго в точке K. Найдите отношение $AK : KB$.

(Вариация задачи Nguyen Dung Thanh из Cut-the-knot)

Ответ: $AK : KB = 2 : 1$.

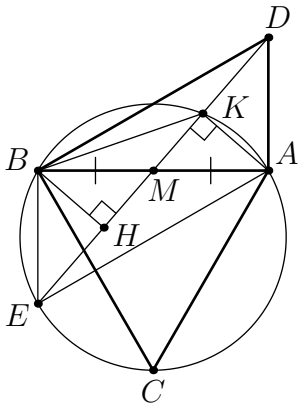


Рис. 3: к решению задачи 3.

Рассмотрим точку E, диаметрально противоположную точке B (рис. 3). Поскольку BE — диаметр, то $AE \perp AB$, а т. к. BE — биссектриса правильного треугольника ABC, то $\angle ABE = 30°$. Отсюда получаем, что в четырехугольнике $ADBE$ противоположные стороны параллельны, т. е.

это параллелограмм, и следовательно, точка M является серединой DE. Угол BKE, как и BAE, опирается на диаметр BE, и потому тоже равен 90°, а по теореме о вписанном угле $\angle AKE = 30^\circ$ (опирается на ту же дугу, что и $\angle ABE$). Опустим из точки A перпендикуляр AH на DE. Тогда $AH = BK$, т. к. прямоугольные треугольники AMH и BMK равны. А поскольку $\angle AKE = 30^\circ$, то $AK = 2AH = 2BK$. □

4. На сторонах AB, BC, CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник и $AK < KB$, $BL > LC$ и $CM < MD$. Может ли площадь этого прямоугольника быть больше половины площади четырехугольника $ABCD$? *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: Может.

Стороны прямоугольника отрезают от четырехугольника четыре треугольника. Покажем, что общая площадь этих треугольников может быть меньше площади прямоугольника (тогда последняя будет больше половины площади четырехугольника). «Загнем» треугольники внутрь прямоугольника. Пусть A', B', C', D' — вершины «загнутых» треугольников, т. е. точки, симметричные A, B, C, D относительно соответствующих сторон прямоугольника. Заметим, что, например, $\angle AKN + \angle BKL = 90^\circ$. Поэтому углы «загнутых» треугольников с общей вершиной K полностью покроют угол K прямоугольника, но перекрываться друг с другом не будут. Точнее, в силу неравенства $AK < KB$, точка A' попадет внутрь отрезка KB'. Аналогично, C' попадет внутрь отрезков LB' и MD', то есть C' будет пересечением этих отрезков. О точке D' мы знаем только то, что она попадет на луч NA'. Обратно, если мы зададим точки A', B', C', D' внутри прямоугольника так, чтобы соблюдались указанные условия, то отразив их относительно его сторон, получим вершины четырехугольника $ABCD$, удовлетворяющего, вместе с прямоугольником, условиям задачи.

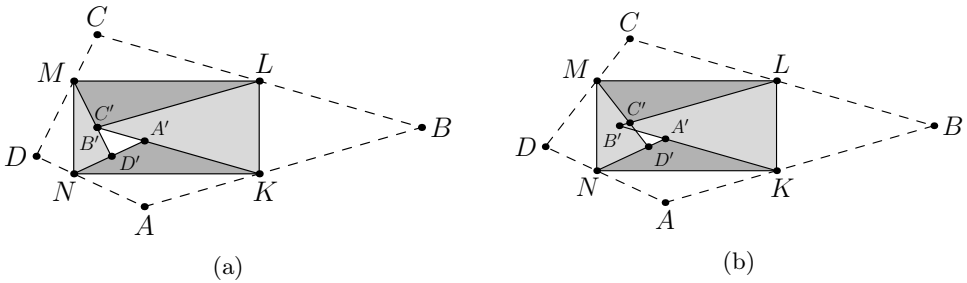


Рис. 4: к решению задачи 4.

Объясним, как выбрать эти точки так, чтобы общая площадь треугольников была меньше площади прямоугольника. Возьмем точку B' на от-

резке, соединяющем середины сторон KL и MN, ближе к стороне MN. В качестве A' возьмем середину отрезка KB'. Проведем отрезок MB' и продолжим его до пересечения с NA' в точке D' (рис. 4a). Возьмем $C' = B'$, тогда сумма площадей треугольников $KB'L$, $LC'M$, $MD'N$ и $NA'K$ меньше площади прямоугольника, т. к. они не перекрываются, а треугольник $A'B'D'$ не закрыт. При этом все наши условия, кроме неравенства $LC' < LB'$ будут выполнены. Если чуть-чуть сдвинуть точку C' внутрь отрезка $B'L$ (рис. 4b), то и это условие будет соблюдено, а сумма площадей треугольников изменится незначительно (можно сделать это изменение сколь угодно малым), т. е. по-прежнему будет меньше площади прямоугольника. □

Старшая лига

1. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что его высота CD и биссектриса BE пересекаются в такой точке M, что $CM = 2MD$ и $BM = ME$.

(А. А. Егоров)

Ответ: $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$.

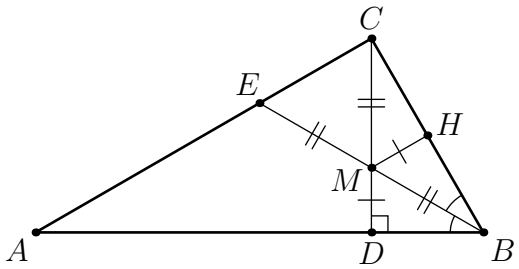


Рис. 5: к решению задачи 1.

Проведем из точки M перпендикуляр MH к BC (рис. 5). Поскольку точки биссектрисы угла равноудалены от его сторон, $MH = MD$, то есть в прямоугольном треугольнике CMH катет MH вдвое короче гипотенузы CM. Следовательно, $\angle MCH = \angle DCB = 30°$, а значит, $\angle DBC = 90° - 30° = 60°$, откуда $\angle CBM = \angle DBM = 30°$, а $\angle DMB = 60°$. В треугольнике BCM углы при вершинах B и C равны, поэтому он равнобедренный: $MC = MB = ME$. А поскольку $\angle CME = \angle DMB = 60°$, то треугольник EMC равносторонний, $\angle ECM = 60°$ и $\angle ACB = 60° + 30° = 90°$. □

2. Существует ли описанный 27-угольник, длины сторон которого равны 1, 2, …, 27? (Стороны могут располагаться в произвольном порядке.)

(предложил И. А. Шейпак)

Ответ: не существует.

Пусть длины сторон (по часовой стрелке) равны $a_1 = 1$, a_2, a_3, $\ldots$, a_{27}. Точками касания стороны делятся на отрезки длин:
1-ая сторона: x и $a_1 - x = 1 - x$, $x \in (0; 1)$;
2-ая сторона: $a_1 - x$ и $a_2 - a_1 + x$;
$\ldots$
27-ая сторона: $a_{26} - a_{25} + a_{24} - \ldots - a_1 + x$ и $a_{27} - a_{26} + a_{25} - \ldots - a_2 + a_1 - x$. Значит, $x = a_{27} - a_{26} + a_{25} - \ldots - a_2 + a_1 - x$. Поскольку a_j целые, а $x \in (0; 1)$, то $x = 1/2$. Тогда

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{27} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{26} + 1.$$

Значит, число $a_1 + a_2 + \ldots + a_{27} = 1 + 2 + \ldots + 27 = \frac{27 \cdot 28}{2} = 27 \cdot 14$ должно быть нечетно. Противоречие. □

3. В кубическом ящике размером $1 \times 1 \times 1$ лежат 8 деревянных шаров. Может ли сумма их радиусов быть больше 2? *(В. Н. Дубровский, К. А. Кноп)*

Ответ: может.

Положим на дно ящика в его противоположные углы два равных шара радиуса R, каждый из которых касается другого и двух стенок ящика. (Эти шары будут вписаны в треугольные призмы, на которые ящик делится вертикальной диагональной плоскостью.) Рассмотрим шары, симметричные этим двум относительно оси, проходящей через центры двух противоположных боковых стенок. Ясно, что они будут вписаны в верхние углы ящика и все 4 шара будут касаться друг друга; центры всех 4 шаров образуют тетраэдр.

Теперь в два свободных нижних угла ящика положим равные шары меньшего радиуса r так, чтобы каждый из них касался двух стенок и двух больших шаров: можно сначала закатить в угол шар очень маленького радиуса, а потом начать его «раздувать», пока он не коснется одного (а значит, и второго) большого шара. Такие же шары поместим в два последних свободных угла — при крышке.

Оценим сумму радиусов шаров. Рассмотрим 4 нижних шара (рис. 6). Разобьем их на две пары из касающихся друг друга большого и малого шаров. Пусть O_1 и O_2 — их центры, T_1 и T_2 — точки их касания с параллельными боковыми стенками. Длина ломаной $T_1O_1O_2T_2$ равна $R + (R + r) + r = 2(R + r)$. В то же время она больше ребра куба, так как его длина, очевидно, равна наименьшему расстоянию между точками параллельных граней. Итак, $2(R + r) > 1$, а сумма всех 8 радиусов $4(R + r) > 2$. □

4. На стороне ML квадрата $KMLN$ вне него построен прямоугольный треугольник CML. Катеты CM и CL продолжены до пересечения с прямой KN в точ-

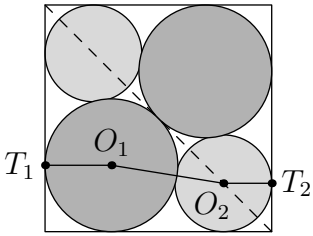


Рис. 6: к решению задачи 3.

ках A и B соответственно. Отрезок AL пересекает KM в точке P, BM пересекает NL в точке Q. Докажите, что треугольник CPQ равнобедренный.

(Stan Fulger)

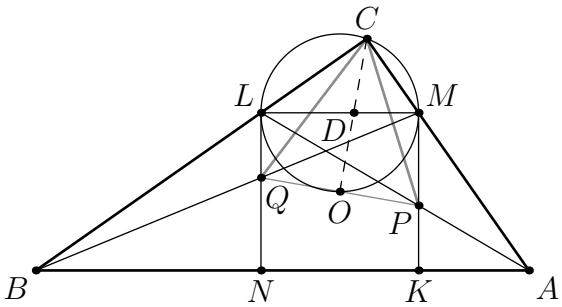


Рис. 7: к решению задачи 4.

Рис. 7. Из очевидного подобия треугольников AKP и LMP следует, что $KP : PM = AK : LM = AK : KM = AC : CB$ (т. к. $\triangle AKM \sim \triangle ABC$). Аналогично получим, что и $LQ : QN = AC : CB$. Таким образом, точки P и Q делят стороны KM и LN квадрата в равных отношениях, а значит, они симметричны относительно его центра O. Рассматривая окружность с диаметром ML, которая, очевидно, проходит через C и O, видим, что CO — биссектриса угла LCM (т. к. дуги MO и OL равны). Поэтому CO пересекает сторону ML в точке D, делящей ее в отношении $MD : DL = CM : CL = CA : CB$, т. е. так же, как P и Q делят соответствующие стороны квадрата. Поэтому точка D получается из P поворотом вокруг O на $90°$, т. е. $\angle POD = 90°$. Следовательно, CO — высота, а также и медиана треугольника CPQ. Отсюда и следует, что $CP = CQ$. $\square$

Алгебра и теория чисел

Младшая лига

1. На бахчевом развале продают арбузы и дыни. Средняя масса арбуза равна 12 кг, а средняя масса дыни — 6 кг. Сколько арбузов, а сколько дынь на развале, если их суммарное количество 300 шт, а суммарная масса 2,4 т?

Ответ: арбузов — 100, дынь — 200.

Обозначив через x и y количество арбузов и дынь соответственно, получим $12x + 6y = 2400$ и $x + y = 300$, откуда $x = 100$ и $y = 200$. □

2. Решите уравнение $2^{2p} - 2^p + 1 = q$, где p и q простые числа.

Ответ: $p = 2$, $q = 13$.

Решение. Пусть $p = 2$, тогда $q = 13$.

Пусть теперь p — нечетное простое. Тогда левая часть равенства делится на 3 (так как 2 в нечетной степени дает при делении на 3 остаток 2, а в четной — 1), поэтому $q = 3$, откуда $(2^p - 2)(2^p + 1) = 0$, т.е. решений нет. □

3. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

$$x^2 - (a + b)x + 8 = 0 \tag{1}$$

$$x^2 - b(b + 1)x + c = 0 \tag{2}$$

$$x^4 - b(b + 1)x^2 + c = 0 \tag{3}$$

Каждое из них имеет хотя бы один действительный корень. Известно, что корни уравнения (1) больше 1. Известно также, что все корни уравнения (1) удовлетворяют уравнению (3) и хотя бы один корень уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2). Найдите все возможные тройки чисел a, b, c.

Ответ: тройки (a, b, c) таковы $(2, 4, 64)$, $(11, -5, 64)$, $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 16\sqrt{2}\right)$, $\left(1 + 6\sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2}, 16\sqrt{2}\right)$,

Пусть $x = x_1$ и $x = x_2$ (возможно $x_1 = x_2$) — корни уравнения (1), а $x = t_1$ и $x = t_2$ — корни уравнения (2). Тогда у уравнения (3) корни $\pm\sqrt{t_1}$ и $\pm\sqrt{t_2}$ (какие-то из них могут пропасть, если t_1 или t_2 окажутся неположительными). Если одно из чисел t_1 или t_2 не больше 1 (пусть это будет t_1), то $\sqrt{t_1}$ не корень уравнения (1), поэтому обязательно $t_2 > 1$ и $x_1 = x_2 = \sqrt{t_2}$. Но тогда оба корня $x_1 = x_2$ — корни уравнения (2), поэтому $\sqrt{t_2} = x_1 = t_2 > 1$, что невозможно. Значит, оба корня t_1, t_2 больше 1.

Рассмотрим случай $x_1 \neq x_2$. Тогда $x_1 = \sqrt{t_1}$ и $x_2 = \sqrt{t_2}$, а также $x_1 = t_2$ (для этого можно перенумеровать корни, а случай $x_1 = t_1$ невозможен, так как $t_1 \neq \sqrt{t_1}$). Далее, из теоремы Виета для уравнения (1) получаем $8 = x_1x_2 = t_2\sqrt{t_2}$, откуда $t_2 = 4 = x_1$, $x_2 = 2$, $t_1 = t_2^2 = 16$. Наконец, по той же теореме Виета получаем $a + b = 6$, $b(b + 1) = 20$ и $c = 64$, откуда $b = 4$ или $b = -5$ и, соответственно, $a = 2$ или $a = 11$.

Рассмотрим случай $x_1 = x_2$. Аналогично получаем $x_1 = x_2 = \sqrt{t_1} = t_2$, а из теоремы Виета для уравнения (1) имеем $x_1^2 = 8$, то есть $x_1 = x_2 = t_2 = 2\sqrt{2}$ и $t_1 = 8$. Далее, получаем $a+b = 4\sqrt{2}$, $b(b+1) = 8+2\sqrt{2}$ и $c = 16\sqrt{2}$, откуда $b = -\frac{1}{2} \pm \frac{4\sqrt{2}+1}{2}$ и, соответственно, $a = 4\sqrt{2} + \frac{1}{2} \mp \frac{4\sqrt{2}+1}{2}$. □

4. Пусть $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leqslant 2(1-x)(1-y) + 1\,.$$

Сделаем замену $1-x = u$ и $1-y = v$, тогда $0 \leqslant u, v \leqslant 1$, $1-x^2 = u(2-u)$, $1-y^2 = v(2-v)$ и требуется доказать неравенство

$$2\sqrt{uv(2-u)(2-v)} \leqslant 2uv + 1,$$

или

$$2\sqrt{uv(4-2(u+v)+uv)} \leqslant 2uv + 1.$$

Обозначим $g = \sqrt{uv}$. Учитывая оценки $u+v \geqslant 2g$ и $2g \leqslant 1+g^2$, получаем

$$\begin{aligned} 2\sqrt{uv(4-2u-2v+uv)} &= 2\sqrt{g^2(4-2u-2v+g^2)} \leqslant 2\sqrt{g^2(4-4g+g^2)} = \\ &= 2\sqrt{g^2(2-g)^2} = 2g(2-g) = 4g - 2g^2 \leqslant \\ &\leqslant 4 + 4g^2 - 2g^2 = 2g^2 + 1 = 2uv + 1\,. \quad \square \end{aligned}$$

Старшая лига

1. Решите уравнение

$$3p^q + 3q^p = n!\,,$$

где p, q — простые числа, а n — натуральное.

Ответ: $p = q = 2$, $n = 4$.

Если $p = q$, то получаем $2 \cdot 3p^p = n!$, откуда $n = 4$ (если $n > 4$, то число $n!/6 = p^p$ делится на 2 и на 5, что невозможно) и $p = q = 2$.

Если $p < q$, то $p < n$ (иначе $p^q > n!$), поэтому $3q^p = n! - 3p^q$ делится на p. А тогда и $3q$ делится на p, а значит, остается проверить только случай $3 = p < q$. Тогда $n! = 3(3^q + q^3) > 5!$ и $n > 5$, поэтому $n!$ делится на 9, а значит, q делится на 3, что невозможно для простого $q > 3$. □

2. Пусть a, b, c — стороны треугольника, периметр которого не превышает 2π. Докажите, что $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ также являются сторонами некоторого треугольника.

Докажем, например, неравенство $\sin b + \sin c > \sin a$ (два других неравенства треугольника доказываются аналогично):

$$\sin b + \sin c = 2 \cdot \sin \frac{b+c}{2} \cdot \cos \frac{b-c}{2} > 2 \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b-c}{2} >$$
$$> 2 \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b-c}{2} > 2 \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} = \sin a\,,$$

так как из $a < b+c < 2\pi - a$ следует $\sin \frac{b+c}{2} > \sin \frac{a}{2}$, а из $|b-c| < a$ следует $\cos \frac{b-c}{2} > \cos \frac{a}{2}$. □

3. Назовем натуральное число n *забавным*, если для любого его натурального делителя d число $d+2$ является простым.

(a) Какое наибольшее количество делителей может иметь забавное число?

(b) Найдите все забавные числа с максимальным количеством делителей.

Ответ: максимум 8 делителей, только у одного забавного числа $3^3 \cdot 5$.

Решение. Среди делителей забавного числа не может быть ни двойки, ни простого d с остатком 1 при делении на 3 (иначе простое $d+2$ кратно 3, откуда $d = 1$). Поэтому в качестве делителей остаются тройки (и их степени) и максимум один простой делитель $p \equiv 2 \pmod 3$ (если есть еще один такой делитель q, то $d = pq \equiv 1 \pmod 3$ и $d+2$, кратное 3, — не простое). Причём степень тройки не может быть больше 4, так как иначе есть делитель $d = 3^5$, для которого $d+2 = 245$ — не простое.

Может ли забавное число иметь вид $3^k \cdot p$ при $k < 5$?

1. Если $p = 5$, то при $k = 4$ есть делитель $d = 3^4 \cdot 5$, причём $d+2 = 407$ — делится на 11, а при $k = 3$ получаем забавное число $3^3 \cdot 5$ с 8 делителями.

2. Если $p \neq 5$ и $k > 2$, то как минимум один из делителей d вида $3^m \cdot p$, где $m = 0, 1, 2, 3$, при делении на 5 даст остаток 3 (что проверяется перебором их ненулевых остатков), а тогда $d+2$ кратно 5, и число не забавно. Таким образом, при $k \leqslant 2$ максимум 6 делителей (что меньше 8) может иметь забавное число вида $3^2 \cdot p$. □

4. Пусть $a, b, c > 0$ и $ab + bc + ac = 1$. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leqslant \frac{1}{abc}\,.$$

Решение. Поскольку $f(x) = \sqrt[3]{x}$ выпукла вниз а на $[0, +\infty)$, из неравен-

ства Йенсена получаем

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{a}+6b\right)+\left(\frac{1}{b}+6c\right)+\left(\frac{1}{c}+6a\right)\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{abc}+6(a+b+c)\right)}\leqslant\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{abc}+\frac{6}{3abc}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

При этом мы использовали:

1) данное условие $ab+bc+ac=1$;

2) неравенство $(a+b+c)\leqslant\frac{1}{3abc}$, вытекающее из неравенства

$$(a+b+c)\cdot 3abc\leqslant(ab+bc+ac)^2\Leftrightarrow a^2bc+ab^2c+abc^2\leqslant a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2,$$

которое сводится к известному $xy+xz+yz\leqslant x^2+y^2+z^2$ заменой $x=bc$, $y=ac$, $z=ab$;

3) неравенство $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\leqslant\frac{1}{abc}$, вытекающее из неравенства

$$(abc)^{2/3}=\sqrt[3]{(ab)(bc)(ac)}\leqslant\frac{ab+bc+ac}{3}=\frac{1}{3}.\quad\square$$

Комбинаторика и логика

Младшая лига

1. В каком порядке надо переставить числа $1, 2, \ldots, 2017$, чтобы для полученного в результате набора $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ выражение

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + 2017 \cdot a_{2017}$$

имело наименьшее значение? *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: строго в обратном порядке — $2017, 2016, \ldots, 1$.

Решение.

А. Если набор $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ не совпадает с набором $2017, 2016, \ldots, 1$, то найдутся два номера $i < j$, для которых $a_i < a_j$, а значит, значение выражения можно уменьшить, переставив местами a_i и a_j, так как

$$(i \cdot a_i + j \cdot a_j) - (i \cdot a_j + j \cdot a_i) = (i - j)(a_i - a_j) > 0.$$

Б. Поскольку различных таких наборов конечное множество, минимум данного выражения обязательно достигается на некотором наборе a_1, a_2, $\ldots$, a_{2017}, причём этот набор, согласно п. А, не может быть не упорядоченным по убыванию.

Замечание. Без уточнения из п. Б решение не полно, так как в п. А доказано лишь, что на других наборах минимум не достигается. А вдруг он не достигается вообще, вдруг процесс уменьшения значения выражения не закончится никогда? □

2. На складе в тёмной комнате разбросаны 24 тапочка, которые первоначально образовывали 12 пар: 3 разных цветов и 4 разных фасонов (одинаковых пар не было). Какое наименьшее число тапочек должен вынести из комнаты продавец, чтобы *наверняка* предъявить покупателю 2 пары тапочек разных цветов и одновременно разных фасонов? *(С. Б. Гашков)*

Ответ: 17.

Решение. Если взять не более 16 тапочек, то может случиться, что среди них надётся не более $16 - 12 = 4$ пар, причём все они вполне могут оказаться 1 цвета. Поэтому такого количества тапочек не достаточно для гарантированного получения *искомых* 2 пар тапочек.

Если же взять 17 тапочек, то среди них найдётся не менее $17 - 12 = 5$ пар, причём они будут представлять не менее 2 цветов (ведь пар каждого цвета окажется не более 4) и не менее 2 фасонов (ведь пар каждого фасона окажется не более 3). Но тогда, *выберем* из них 2 пары разного цвета:

(а) если они еще и разного фасона, то эти 2 пары — искомые;

(б) если они одного фасона, то добавим пару другого фасона, и она хотя бы с одной из *выбранных* 2 пар ещё и разного цвета, то есть образует с ней искомые 2 пары. □

3. Из любой ли возрастающей последовательности натуральных чисел можно выбрать такую *подпоследовательность* (т. е. проредить её, убрав часть членов), чтобы выполнялось одно из двух:

1) либо каждый её член делится на любой меньший;

2) либо наоборот, ни один её член не делится ни на какой другой?

(И. Н. Сергеев)

Ответ: да.

Решение. Если просматривать подряд все члены последовательности, то могут представиться ровно две взаимоисключающие возможности:

1) либо, начиная с какого-то номера, окажется, что для каждого члена последовательности с большим номером хотя бы один из следующих за ним членов на него делится. Тогда выберем первый такой член, по нему, аналогично, второй, по нему третий и так далее. В результате получим подпоследовательность первого типа, так как каждый член в ней (по транзитивности) делится не только на предыдущий, но и на все члены с меньшими номерами;

2) либо для любого номера в последовательности найдется такой член с большим номером, что ни один из следующих за ним членов на него не делится. Тогда по номеру 1 выберем первый такой член, по его номеру, аналогично, второй, по его номеру третий и так далее. В результате получим подпоследовательность второго типа. □

4. Из сувениров 6 видов составили 5 различных подарочных комплектов, содержащих по 3 разных сувенира каждый. Можно ли утверждать, что какие-то 2 из этих комплектов содержат *ровно* 1 общий сувенир? *(С. Б. Гашков)*

Ответ: да.

Решение. Пусть во множестве M составленных 5 комплектов никакие 2 комплекта *не содержат* ровно 1 общий сувенир. Тогда число общих сувениров у любых 2 разных комплектов равно либо 0, либо 2 — комплекты этого (последнего) типа будем называть *связанными*.

Введённое на множестве M отношение связанности транзитивно: если комплекты A, B связаны и комплекты B, C связаны, то комплекты A, C тоже связаны, так как обязательно имеют хотя бы 1 общий сувенир (иначе комплект B должен был бы содержать 4 разных сувенира: 2 из комплекта A и 2 из комплекта C).

Поэтому множество M разбивается на такие классы (возможно, всего 1

класс), что любые 2 комплекта из одного класса имеют ровно 2 общих сувенира, а из разных — 0. Пусть некоторый класс охватывает в общей сложности ровно $k \geqslant 3$ сувениров, тогда:

(1) если $k = 3$, то в классе ровно 1 комплект вида $\{a, b, c\}$;

(2) если $k = 4$, то в классе не более 4 комплектов вида $\{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c, d, a\}$ и $\{d, a, b\}$;

(3) если $k \geqslant 5$, то в классе ровно $k - 2$ комплекта вида $A_i = \{a, b, c_i\}$, где $i = 1, \ldots, k - 2$: действительно, фиксировав два комплекта A_1 и A_2, составленные из сувениров a, b, c_1, c_2, мы получим, что любой комплект, содержащий новый сувенир c_3, имеет вид A_3 (если он не содержит 2 сувениров a и b, то он должен содержать хотя бы 1 из них, а с ним и все сувениры c_1, c_2, c_3, что слишком много), а тогда и любой следующий комплект имеет также вид A_i (по той же причине).

Таким образом, множество, состоящее из исходных 6 сувениров, охватывается (возможно, не целиком) либо одним классом вида (3) или (2), содержащим не более 4 комплектов, либо двумя классами вида (1), содержащими по 1 комплекту каждый. В любом случае количество комплектов не превосходит 4, что противоречит условию. □

5. На столе лежат 30 красных и 50 зелёных камней. Два игрока, Петя и Вася, ходят поочерёдно: при каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет произвольное (по своему усмотрению) число камней этого цвета, являющееся делителем числа камней другого цвета на момент хода (ноль делится на любое натуральное число). Выигрывает тот, кто берёт последний камень. Кто из них имеет *гарантированный шанс* выиграть, если Петя ходит первым?

(предложил И. А. Шейпак)

Ответ: Вася.

Решение. Пусть в какой-то момент на столе лежат a красных и b зелёных камней. Тогда:

(1) если a и b имеют разную чётность, то ходящий выигрывает, поскольку если чётное число равно 0, то ему для выигрыша нужно просто забрать оставшиеся камни (их число — делитель нуля), а если оба числа не равны 0, то он вычитает из чётного числа 1 (заведомо — делитель другого числа) и приходит к следующей ситуации (2), когда оба числа нечётны;

(2) если a и b нечётны, то ходящий проигрывает, так как он вынужден из одного нечётного числа вычесть также нечётное число (делитель нечетного числа) и получить чётное, то есть создать ситуацию из (1), выигрышную для противника;

(3) если a и b чётны, то каждый игрок вынужден отнимать чётное число камней, так как иначе он создает ситуации (1), выигрышную для противника. Поэтому мы можем рассматривать не камни, а пары камней, и решение задачи для $(2a, 2b)$ эквивалентно решению задачи для (a, b).

Именно такая ситуация задана в условии, где $a = 15$, $b = 25$, поэтому задача сводится к случаю (2) и выигрывает Вася;

(4) для полноты заметим, что применяя идею из п. (3) несколько раз, получаем, что вообще, если $a = 2^k\alpha$ и $b = 2^k\beta$, где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, то при обоих нечетных α, β начинающий проигрывает, а при ровно одном нечетном — выигрывает. $\square$

Комбинаторика

Старшая лига

1. В каком порядке надо переставить числа $1, 2, \ldots, 2017$, чтобы для полученного в результате набора $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ выражение

$$1^2 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + \ldots + 2017^2 \cdot a_{2017}$$

имело наибольшее значение? *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: в исходном порядке — $1, 2, \ldots, 2017$.

Решение.

А. Если набор $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ не совпадает с набором $1, 2, \ldots, 2017$, то найдутся два номера $i < j$, для которых $a_i > a_j$, а значит, значение выражения можно увеличить, переставив местами a_i и a_j, так как

$$(i^2 \cdot a_i + j^2 \cdot a_j) - (i^2 \cdot a_j + j^2 \cdot a_i) = (i^2 - j^2)(a_i - a_j) < 0.$$

Б. Поскольку различных таких наборов конечное множество, максимум данного выражения обязательно достигается на некотором наборе $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$, причём этот набор, согласно п. А, не может быть не упорядоченным по возрастанию.

Замечание. Без уточнения из п. Б решение не полно, так как в п. А доказано лишь, что на других наборах максимум не достигается. А вдруг он не достигается вообще, вдруг процесс увеличения значения выражения не закончится никогда? □

2. На складе в тёмной комнате разбросаны 24 тапочка, которые первоначально образовывали 12 пар: 3 разных цветов и 4 разных фасонов (одинаковых пар не было). Какое наименьшее число тапочек должен вынести из комнаты продавец, чтобы наверняка предъявить покупателю 3 пары тапочек 3 разных цветов и одновременно 3 разных фасонов? *(С. Б. Гашков)*

Ответ: 21.

Решение. Если взять не более 20 тапочек, то может случиться, что среди них надётся не более $20 - 12 = 8$ пар, причём они вполне могут оказаться не 3, а только 2 цветов. Поэтому такого количества тапочек не достаточно для гарантированного получения *искомых* 3 пар тапочек.

Если же взять 21 тапочку, то среди них найдётся не менее $21 - 12 = 9$ пар, причём они будут представлять не менее 3 цветов (иначе всего пар не более $3 \times 4 = 8$). Но тогда *выберем* из них 3 пары 3 разных цветов:

(а) если они ровно 3 разных фасонов, то эти 3 пары — искомые;

(б) если все они одного фасона, то возьмем любую пару другого фасона и заменим ею *выбранную* пару того же цвета, оказавшись в следующей ситуации (в);

(в) если они ровно 2 разных фасонов, то какие-то 2 *выбранные* пары имеют 1 фасон и тогда хотя бы 1 из них можно заменить парой того же цвета, но какого-нибудь 3-го фасона (такая пара найдётся, иначе всего пар не более $2+2+4=8$), получив в результате искомые 3 пары. $\square$

3. Во множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел требуется заранее *выделить* такое подмножество, чтобы при всех достаточно больших *чётных* значениях $n \in \mathbb{N}$ после переноса в выражении $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ всех *выделенных* сомножителей из числителя в знаменатель получалась бы величина $n?$, удовлетворяющая неравенству

$$|n? - 1| < 10^{-2017}.$$

Возможно ли это? *(И. Н. Сергеев)*

Ответ: да.

Решение. Для любого чётного $n = 2k \in \mathbb{N}$ обозначим $a_k = (2k-1)/(2k)$, $b_k = (2k)/(2k-1)$ и заметим, что обе последовательности a_k, b_k строго монотонно сходятся к 1, причём первая возрастает, а вторая убывает.

Теперь построим последовательность $x_k \in \{a_k, b_k\}$, а по ней определим выражение $n? = (2k)? = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k$ (которое тогда автоматически будет иметь требуемый в задаче вид) следующим образом индукцией по $k \in \mathbb{N}$:

1) положим $x_1 = a_1 = 1/2$;

2) пусть при некотором $k > 1$ уже построены числа $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, тогда если $(2k-2)? \leqslant 1$, то положим $x_k = b_k > 1$, а если $(2k-2)? > 1$, то положим $x_k = a_k < 1$.

Действуя по указанной схеме, мы получим

$$2? = \frac{1}{2} < 4? < 6? < 8? < 10? = \frac{64}{63} > 12? = \frac{176}{189} < 14? = \frac{352}{351} > \ldots$$

Построенная таким образом последовательность $(2k)?$ сходится к 1 (а значит, начиная с некоторого номера, не будет покидать окрестность точки 1 радиуса 10^{-2017}), действительно:

а) пусть $(2k-2)? \leqslant 1$, тогда если $(2k)? \leqslant 1$, то число $(2k)?$ ближе к 1, чем $(2k-2)?$, а если $(2k)? > 1$, то число $(2k)?$ ближе к 1, чем b_k;

б) пусть $(2k-2)? > 1$, тогда если $(2k)? > 1$, то число $(2k)?$ ближе к 1, чем $(2k-2)?$, а если $(2k)? \leqslant 1$, то число $(2k)?$ ближе к 1, чем a_k;

в) члены последовательности $(2k)$? с ростом номера k обязательно оказываются где-то не больше 1, затем где-то больше 1, затем где-то снова не больше 1 и так далее, так как выражение $b_l \cdot \ldots \cdot b_m = (a_l \cdot \ldots \cdot a_m)^{-1}$ при фиксированном l неограниченно растет с ростом m (см. задачу 4а из регаты старшей лиги). $\square$

4. Из сувениров 7 видов составили 6 различных подарочных комплектов, содержащих по 3 разных сувенира каждый. Можно ли утверждать, что какие-то 2 из этих комплектов содержат *ровно* 1 общий сувенир? *(С. Б. Гашков)*

Ответ: да.

Решение. Пусть во множестве M составленных 6 комплектов никакие 2 комплекта *не содержат* ровно 1 общий сувенир. Тогда число общих сувениров у любых 2 разных комплектов равно либо 0, либо 2 — комплекты этого (последнего) типа будем называть *связанными*.

Введённое на множестве M отношение связанности транзитивно: если комплекты A, B связаны и комплекты B, C связаны, то комплекты A, C тоже связаны, так как обязательно имеют хотя бы 1 общий сувенир (иначе комплект B должен был бы содержать 4 разных сувенира: 2 из комплекта A и 2 из комплекта C).

Поэтому множество M разбивается на такие классы (возможно, всего 1 класс), что любые 2 комплекта из одного класса имеют ровно 2 общих сувенира, а из разных — 0. Пусть некоторый класс охватывает в общей сложности ровно $k \geqslant 3$ сувениров, тогда:

(1) если $k = 3$, то в классе ровно 1 комплект вида $\{a, b, c\}$;

(2) если $k = 4$, то в классе не более 4 комплектов вида $\{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c, d, a\}$ и $\{d, a, b\}$;

(3) если $k \geqslant 5$, то в классе ровно $k - 2$ комплекта вида $A_i = \{a, b, c_i\}$, где $i = 1, \ldots, k-2$: действительно, фиксировав два комплекта A_1 и A_2, составленные из сувениров a, b, c_1, c_2, мы получим, что любой комплект, содержащий новый сувенир c_3, имеет вид A_3 (если он не содержит 2 сувениров a и b, то он должен содержать хотя бы 1 из них, а с ним и все сувениры c_1, c_2, c_3, что слишком много), а тогда и любой следующий комплект имеет также вид A_i (по той же причине).

Таким образом, множество, состоящее из исходных 7 сувениров, охватывается (возможно, не целиком) либо одним классом вида (3), содержащим не более 5 комплектов, либо двумя классами вида (1), содержащими по 1 комплекту каждый, либо классами вида (1) и (2), содержащими в общей сложности не более $1 + 4 = 5$ комплектов. В любом случае количество комплектов не превосходит 5, что противоречит условию. $\square$

5. На столе лежат 40 красных и 50 зелёных камней. Два игрока, Петя и Вася,

ходят поочерёдно: при каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет произвольное (по своему усмотрению) число камней этого цвета, являющееся делителем числа камней другого цвета на момент хода (ноль делится на любое натуральное число). Выигрывает тот, кто берёт последний камень. Кто из них имеет *гарантированный шанс* выиграть, если Петя ходит первым? *(И. А. Шейпак)*

Ответ: Петя.

Решение. Пусть в какой-то момент на столе лежат a красных и b зелёных камней. Тогда:

(1) если a и b имеют разную чётность, то ходящий выигрывает, поскольку если чётное число равно 0, то ему для выигрыша нужно просто забрать оставшиеся камни (их число — делитель нуля), а если оба числа не равны 0, то он вычитает из чётного числа 1 (заведомо — делитель другого числа) и приходит к следующей ситуации (2), когда оба числа нечётны;

(2) если a и b нечётны, то ходящий проигрывает, так как он вынужден из одного нечётного числа вычесть также нечётное число (делитель нечетного числа) и получить чётное, то есть создать ситуацию из (1), выигрышную для противника;

(3) если a и b чётны, то каждый игрок вынужден отнимать чётное число камней, так как иначе он создает ситуации (1), выигрышную для противника. Поэтому мы можем рассматривать не камни, а пары камней, и решение задачи для $(2a, 2b)$ эквивалентно решению задачи для (a, b). Именно такая ситуация задана в условии, где $a = 20$, $b = 25$, поэтому задача сводится к случаю (2) и выигрывает Петя;

(4) для полноты заметим, что применяя идею из п. (3) несколько раз, получаем, что вообще, если $a = 2^k\alpha$ и $b = 2^k\beta$, где $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, то при обоих нечетных α, β начинающий проигрывает, а при ровно одном нечетном — выигрывает. $\square$

Командная олимпиада

Младшая лига

1. (3) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого есть точный квадрат, треть — куб и одна пятая — пятая степень целого числа.

(предложил И. А. Шейпак)

Ответ: $n = 2^{15}3^{10}5^{6}$.

Пусть наше число $n = 2^k 3^l 5^m s$, где $(s, 30) = 1$. Тогда $k - 1 \vdots 2$, $k \vdots 3$, $k \vdots 5$, значит, $k \geqslant 15$. Аналогично, $l \geqslant 10$ и $m \geqslant 6$. Также $s \geqslant 1$. Значит, $n \geqslant 2^{15}3^{10}5^{6}$, и равенство нам очевидно подходит. □

2. (3) В классе учится $N < 40$ ребят. Все они написали контрольную по математике. Считается, что человек написал контрольную успешно, если он набрал не меньше 65 баллов. Оказалось, что средний балл всех ребят равен 66, средний балл написавших успешно равен 71, а средний балл написавших неуспешно равен 56. Позднее в условии одной из задач была обнаружена ошибка, и всем ребятам добавили по 5 баллов. После этого средний балл написавших успешно стал равен 75, а написавших неуспешно — 59. Сколько ребят учится в классе? *(ItaMO 2010, p1)*

Ответ: $N = 12$, $N = 24$ или $N = 36$.

Пусть x — число ребят, написавших успешно при первом подсчете, y — число остальных ребят, d — число ребят, написавших неуспешно при первом подсчете и успешно при втором подсчете. Тогда

$$66(x + y) = 71x + 56y \quad \Rightarrow \quad x = 2y\,.$$

Так как $x+y < 40$, то $y < 40/3 < 14$. Средний балл всех ребят при втором подсчете равен $66 + 5 = 71$, поэтому

$$71(x + y) = 75(x + d) + 59(y - d) \quad \Rightarrow \quad y = 4d\,.$$

Получаем варианты: $(x, y, z) = (8, 4, 1)$, $(x, y, z) = (16, 8, 2)$ и $(x, y, z) = (24, 12, 3)$. Первый случай реализуется, например, если при первом подсчете трое ребят набрали по 54 балла, один — 62 балла и 8 — по 71 баллу. Примеры для второго и третьего случаев получаются удвоением и утроением первого примера. □

3. (4) На плоскости отмечено $n \geqslant 3$ точек (никакие три не лежат на одной прямой) и k отрезков, соединяющих некоторые из них. Фомá и Ерёма играют в следующую игру. Ходы делаются по очереди. Сначала Фома выбирает две точки, называет одну из них A, другую B и кладет фишку в A. После этого каждым своим ходом Ерёма передвигает фишку из одной отмеченной точки в другую вдоль отрезка (если это возможно), а Фома каждым своим ходом

удаляет один отрезок (кроме отмеченных точек). Ерёма победит, если сможет переместить фишку в B, если не сможет — то победит Фома.

Число точек n фиксировано. При каком наибольшем k Фома может гарантировать себе победу независимо от того, какие отрезки проведены изначально?
(Junior Olympiad of Malaysia 2015 P1)

Ответ: $\dfrac{n(n-1)}{2} - 1$.

Покажем, что максимальное k равно $n(n-1)/2 - 1$. Действительно, если $k = n(n-1)/2$, то отрезками соединены все пары точек. При любом выборе точек A и B Фома может попасть в B на первом ходу.

Если же $k < n(n-1)/2$, то найдутся две точки, между которыми изначально нет отрезка. Тогда если Фома назовет такую пару точек A и B, то Ерёма не сможет выиграть на первом ходу. Теперь для победы Фоме достаточно на каждом своем ходу удалять отрезок между B и точкой с фишкой, если таковой имеется, и любой другой, если не имеется. □

4. (5) Существуют ли на плоскости такие шесть окружностей, что каждая из них содержит центры ровно трех других? *(IGO 2015)*

Ответ: Да.

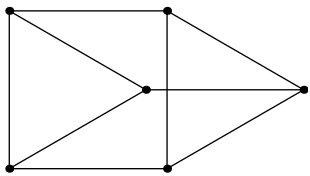


Рис. 1: к решению задачи 4.

На рис. 1 отмечены центры окружностей, радиусы равны отмеченным отрезкам (все проведенные отрезки равны). □

5. (6) В вершинах правильного 2017-угольника расставлены числа 1, 2, …, 2017. Любая его ось симметрии делит числа, не лежащие на ней, на два множества. Назовем расстановку *хорошей* относительно данной оси симметрии, если каждое число одного из множеств больше симметричного ему числа. Существует ли расстановка, являющаяся хорошей относительно каждой оси симметрии?
(А. В. Бегунц: фактически ММО 1983.8.4)

Ответ: да.

Приведем пример такой расстановки (рис. 2). Поставим в одну из вершин 2017-угольника число 1. В соседнюю с 1 по часовой стрелке вершину поставим 2, а в соседнюю против часовой стрелки — вершину 3. Будем продолжать также: если уже поставлены $2k$ и $2k+1$, то $2k+2$ ставим в соседнюю с $2k$ по часовой стрелке, а $2k+3$ — в соседнюю с $2k+1$ против

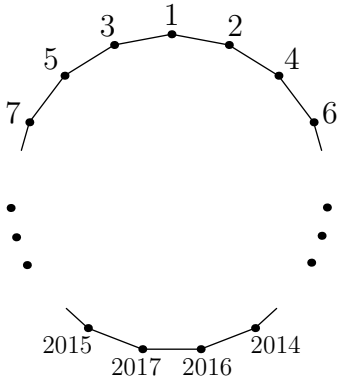


Рис. 2: к решению задачи 5.

часовой стрелки. Получаем, что при обходе многоугольника по часовой стрелке начиная с 1 числа сначала возрастают, а потом убывают.

Возьмем произвольную ось симметрии. Если она прошла через вершину с числом 1 или через вершину с числом 2017, то, как легко убедиться, симметричные числа отличаются на 1 и с одной стороны оси всегда большее. Если ось проходит через любую другую вершину k, то рассмотрим сначала пару чисел, соседних с k, затем пару чисел на расстоянии 2 от k и так далее. Тогда сначала числа с одной стороны от оси убывают (назовем эту сторону меньшей), а с другой – возрастают (назовем ее большей). Потом, при переходе через 1 или 2017, характер монотонности с одной из сторон меняется, и теперь с обеих сторон числа одновременно либо убывают, либо возрастают. Но изменяются они все время на 2, поэтому числа с меньшей стороны попрежнему меньше соответствующих чисел с большей стороны. Наконец, после перехода через второе число из пары 1 или 2017 числа с большей стороны убывают, а с меньшей — возрастают. Осталось заметить, что в последней паре симметричных чисел число с большей стороны на 2 больше числа с меньшей стороны. □

6. (6) Докажите, что если $a, b, c \geqslant 3$, то

$$3(abc + b + 2c) \geqslant 2(ab + 2ac + 3bc)\,.$$

(Junior Olympiad of Malaysia 2015)

Подставим $a = x + 3$, $b = y + 3$, $c = z + 3$ и раскроем скобки. Получим неравенство

$$3xyz + 9xy + 9yz + 9xz + 27x + 30y + 33z + 108 \geqslant$$
$$2xy + 6yz + 4xz + 18x + 24y + 30z + 108,$$

которое, очевидно, верно ввиду $x, y, z \geqslant 0$. □

7. (7) В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH к гипотенузе. Биссектриса BD угла B пересекает высоту в точке E. Пусть K — точка пересечения отрезков AE и HD. Докажите, что четырехугольник $CDKE$ и треугольник AHK равновелики. *(Peru Geometrico)*

Добавляя к каждой из рассматриваемых фигур треугольник ADK, мы сводим задачу к доказательству равенства площадей треугольников ACE и AHD (рис. 3). Приведем два доказательства. Площадь фигуры будем обозначать квадратными скобками.

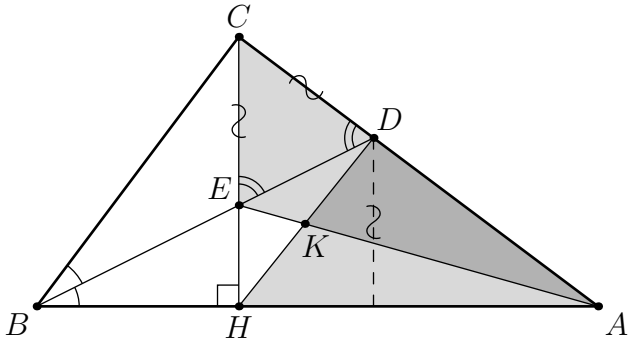


Рис. 3: к решению задачи 7.

Первый способ. Докажем, что площади треугольников ACE и AHD составляют одинаковую часть от площади треугольника ACH, т. е. что $[ACE] : [AEH] = [AHD] : [HCD]$. Имеем: $[ACE] : [AEH] = CE : EH$, $[AHD] : [HCD] = AD : DC$. По свойству биссектрисы треугольника $CE : EH = BC : BH$, $AD : DC = AB : BC$. Но из подобия треугольников ABC и BCH следует, что $AB : BC = BC : BH$.

Второй способ. По формуле площади треугольника $[ACE] = CE \cdot AH/2$, $[AHD] = AH \cdot h_D/2$, где h_D —- расстояние от D до AH. Заметим, что $h_D = DC$, т. к. D лежит на биссектрисе угла ABC, а точки биссектрисы угла равноудалены от его сторон (напомним, что $DC \perp BC$). Поэтому остается доказать, что $CE = DC$, т. е. что треугольник CDE равнобедренный. Докажем, равенство углов D и E этого треугольника. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle CDE = \angle BAD + \angle ABD$, а $\angle CED = \angle BCE + \angle CBD$. Остается заметить, что $\angle BAD = 90^\circ - \angle ABC = \angle BCE$ и $\angle ABD = \angle ABC/2 = \angle CBD$. $\square$

8. (8) Вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1 + \cdots + a_n = 0$ и $|a_1| + \cdots + |a_n| = 1$. Докажите, что:

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant \frac{n-1}{2}.$$

(Moroccan Team Selection Test 2012)

Заметим, что

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant |a_2 + a_3 + \ldots + a_n| + \\ + |a_3 + \cdots + a_n| + \ldots + |a_n|\,.$$

Достаточно при всех k доказать, что $|a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n| \leqslant \frac{1}{2}$. Запишем:

$$\begin{aligned} 1 &= |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \geqslant \\ &\geqslant |a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}| + |a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n| = \\ &= |a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n| + |a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n| = \\ &= 2|a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n|\,. \end{aligned}$$

□

9. (8) В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD. Прямая m проходит через середины сторон BC и AC. Точка E симметрична точке D относительно m. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой AE. *(Centroamerican Math Olympiad 2017)*

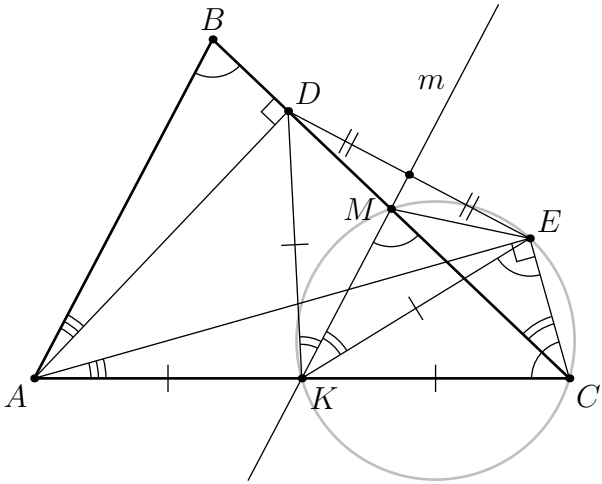


Рис. 4: к решению задачи 9.

Пусть K и M — середины AC и BC (рис. 4). Заметим, что точки A, D, E и C лежат на одной окружности с центром K. Запишем равенство углов:

$$\angle MKE = \angle DKM = \frac{1}{2}\angle DKE = \angle DCE.$$

Это означает, что $MECK$ вписанный. Новая цепочка равенств:

$$\angle ABD = \angle KMC = \angle KEC = \angle ECK\,.$$

Мы получаем, что $\triangle ABD \sim \triangle ACE$, откуда $\angle BAD = \angle EAC$. Осталось воспользоваться тем, что если O — центр описанной окружности ABC, то $\angle BAD = \angle CAO$.

Другое решение. После доказательства вписанности $MECK$ можно завершить решение по-другому. Заметим, что центр описанной окружности MKC лежит на серединном перпендикуляре к отрезку EC, который является средней линией прямоугольного треугольника AEC. При гомотетии с центром C и коэффициентом 2 указанная окружность перейдет в описанную окружность ABC, а средняя линия перейдет в AE. □

10. (10) Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n. Найдите все такие $n > 1$, что

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = \ldots = S(n^2)\,.$$

(предложил И. А. Шейпак)

Ответ: $n = 9, 99, 999, \ldots$ То же самое: $n = 10^k - 1, k \in \mathbb{N}$.

Заметим сначала, что $n \vdots 9$. Действительно, так как $n \equiv S(n) \pmod 9$, то $n \equiv S(n) = S(2n) \equiv 2n \pmod 9 \quad \Rightarrow \quad 2n - n \vdots 9$.

Пусть $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$. Рассмотрим число $d = 1\underbrace{000\ldots0}_{k-2}1$. Так как d — k-значное число и d меньше $1\underbrace{000\ldots0}_{k-2}8$ — минимального k-значного числа, делящегося на 9, то по условию $S(n) = S(dn)$. Покажем, что данное равенство неверно, если $n \neq 10^k - 1$.

Запишем число $dn = \overline{b_0 b_1 b_2 \ldots b_k a_2 a_3 \ldots a_k}$:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} a_1 a_2 \ldots a_k \\ a_1 a_2 \ldots a_k \end{array} \\ \hline b_0\, b_1\, b_2 \ldots b_k\, a_2 \ldots a_k \end{array}$$

(Цифра b_0 может быть равна 0, но дописывание нулей впереди числа не влияет на сумму его цифр).

<u>I случай:</u> $a_1 + a_k < 10$. Тогда

$$\begin{aligned} &b_0 = 0\,; \\ &b_i = a_i,\ i = 2, \ldots, k-1\,; \\ &b_k = a_1 + a_k\,. \end{aligned}$$

Как легко видеть, $S(dn) = 2S(n) \neq S(n)$. Случай разобран.

<u>II случай:</u> $a_1 + a_k \geqslant 10$, среди цифр $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ не все девятки. Тогда выделим в записи группу девяток (возможно, пустую):

$$n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_l 999\ldots9 a_k}\,.$$

Здесь $a_l \neq 9$. Опять рассмотрим $dn = \overline{b_0 b_1 b_2 \ldots b_k a_2 a_3 \ldots a_k}$:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} a_1 a_2 \ldots a_k \\ a_1 a_2 \ldots a_l 99\ldots9 a_k \end{array} \\ \hline b_0\, b_1\, b_2 \ldots b_l\, 00\ldots0 b_k a_2 \ldots a_k \end{array}\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&b_0 = 0\,;\\
&b_i = a_i,\ i = 1, \ldots, l-1\,;\\
&b_l = a_l + 1\,;\\
&b_j = 0,\ j = l+1, \ldots, k-1\,;\\
&b_k = a_1 + a_k - 10\,.
\end{aligned}$$

Теперь предположим $S(n) = S(dn)$:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{l-1} + (a_l + 1) + \\
+ (a_1 + a_k - 10) + a_2 + \cdots + a_k.
\end{aligned}$$

Получаем:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_l + a_k = 9.$$

Но это означает, что $a_1 + a_k \leqslant 9$, что противоречит нашему случаю. Значит, $S(n) \neq S(dn)$.

III случай: $a_1 + a_k \geqslant 10$, и при этом $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 9$. Тогда так как $S(n) \,\vdots\, 9$, то $a_k = 9$ или $a_k = 0$. Но $a_k = 0$ противоречит $a_1 + a_k \geqslant 10$, значит, $a_k = 9$ и $n = 10^k - 1$. Покажем, что в этом случае $S(n) = S(2n) = \ldots S(n^2) = 9k$.

Пусть $c \leqslant n$, найдем $S(cn)$. Заметим сначала, что если $c \,\vdots\, 10$, то $S(cn) = S(\frac{c}{10}n)$, так что достаточно рассмотреть случай $c \not\vdots\, 10$. Запишем c в виде $c = \overline{c_1 c_2 \ldots c_k}$, $c_k \neq 0$. При этом первые несколько цифр могут быть нулями. Тогда

$$\begin{aligned}
cn = (10^k - 1) \cdot \overline{c_1 c_2 \ldots c_k} = \overline{c_1 c_2 \ldots c_k \underbrace{00\ldots0}_{k}} - \overline{c_1 c_2 \ldots c_k} = \\
= \overline{c_1 c_2 \ldots c_{k-1}(c_k - 1)(9 - c_1)(9 - c_2)\ldots(9 - c_{k-1})(10 - c_k)}\,.
\end{aligned}$$

Выражения в скобках — цифры. Легко убедиться, что сумма цифр этого числа равна $9k$. □

Старшая лига

1. (3) Существует ли число, составленное из цифр 5, 6, 8, 9, взятых по 2017 раз каждая, которое делится на какое-то число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, взятых по 2017 раз каждая?

(По мотивам Canadian Mathematical olympiad 2011)

Ответ: нет.

Предположим, что такие числа существуют. Назовем первое число a, второе b, а их отношение c. Заметим, что сумма цифр числа a равна

$$2017 \cdot (5 + 6 + 8 + 9) \equiv 1 \cdot 1 \pmod 9\,,$$

а сумма цифр числа b равна

$$2017 \cdot (1+2+3+4) \equiv 1 \cdot 1 \pmod 9.$$

Тогда $ac \equiv b \equiv 1 \pmod 9$. Отсюда $c \equiv 1 \pmod 9$, т. е. $c = 9k+1$. Случай $k = 0$ не подходит, т. к. $a \neq b$. Если же $k \geqslant 1$, то числа отличаются хотя бы в 10 раз и не могут иметь одинаковое количество цифр в десятичной записи. □

2. (3) Докажите, что существует бесконечно много непостоянных целочисленных арифметических прогрессий, состоящих из 2016 членов, таких, что в каждой из них произведение всех членов является точной 2017-й степенью натурального числа. *(Greece National Olympiad 1998)*

Рассмотрим прогрессию, начальный член которой a, а разность ka. Тогда произведение всех ее членов равно $a^{2016}(1+k)(1+2k)\ldots(1+2015k)$. Тогда, взяв $a = (1+k)(1+2k)\ldots(1+2015k)$, получим, что произведение будет 2017-й степенью числа $(1+k)(1+2k)\ldots(1+2015k)$.

Так как a возрастает при росте k, то при разных k будут получатся разные a, то есть разные прогрессии. Следовательно, мы получим бесконечное число таких прогрессий. □

3. (4) Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$$(x^2-6x+8)P(x) = (x^2+2x)P(x-2)$$

при любых действительных x. *(Greece National Olympiad 2014)*

Ответ: $P(x) = c(x-2)x^2(x+2)$ при $c \in \mathbb{R}$.

Перепишем равенство в виде $(x-2)(x-4)P(x) = x(x+2)P(x-2)$. Заметим, что числа $-2, 0, 2$ являются корнями $P(x)$. Тогда $P(x) = (x-2)x(x+2)Q(x)$. Подставляя это, получим $(x-2)(x-4)(x-2)x(x+2)Q(x) = x(x+2)(x-4)(x-2)xQ(x-2)$. Сокращая на $(x-2)(x-4)x(x+2)$, получаем $(x-2)Q(x) = xQ(x-2)$. (Мы получили это равенство при $x \neq -2, 0, 2, 4$, но если многочлены совпадают при бесконечном количестве значений x, то они тождествено равны. Поэтому при $x = 0$ это равенство тоже верно.)

Тогда у $Q(x)$ корень 0, значит, $Q(x) = xR(x)$. После подстановки получится уравнение $(x-2)xR(x) = x(x-2)R(x-2)$. Получается, что $R(x) = R(x-2)$. Значит, $R(x) = c$ — константа. Тогда $P(x) = c(x-2)x^2(x+2)$. Заметим, что все такие $P(x)$ подходят. □

4. (4) Через вершину A треугольника ABC провели касательную к описанной окружности. Ее точку пересечения с прямой BC назовем P. Пусть Q, R — точки, симметричные P относительно прямых AB, AC соответственно. Докажите, что прямая BC перпендикулярна QR.

(Japan Mathematical Olympiad Finals 2012)

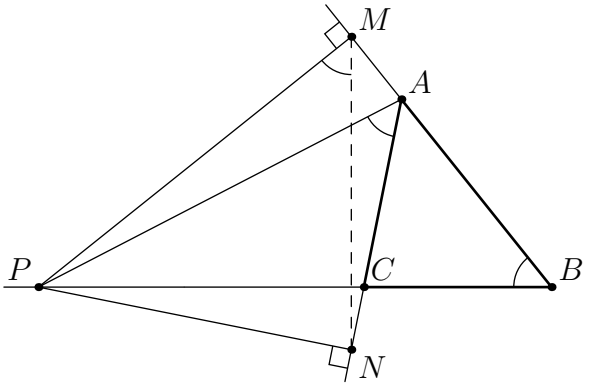


Рис. 5: к решению задачи 4.

Пусть M, N — середины PQ и PR соответственно (рис. 5). Тогда $MN \parallel QR$, так как MN — средняя линия в треугольнике PQR. Тогда достаточно доказать, что $MN \perp BC$. Не ограничивая общность будем считать, что $\angle C > \angle B$. Тогда P ближе к C, чем к B. Тогда $\angle PAC = \angle ABC$, (опираются на дугу ABC). Так как $AM \perp PM$ и $AN \perp PN$ по построению, то $PMAN$ вписанный, а значит $\angle PMN = \angle PAN = \angle ABC$, и $\angle MPC = 90^\circ - \angle ABC$. Из суммы углов треугольника MCP получаем $\angle MCP = 90^\circ$ что и требвалось. □

5. (5) В колоде $2^n - 1$ карт. Ее тасуют следующим образом: верхние 2^{n-1} и нижние $2^{n-1} - 1$ смешиваются через 1, сохраняя порядок (верхняя карта при этом остается на месте). Через сколько таких операций колода придет в первоначальное положение? *(В. В. Новиков)*

Ответ: n.

Занумеруем места карт сверху вниз, начиная с нуля. Тогда карта на месте x переходит на место $2x \pmod{2^n - 1}$. Тогда за k шагов она перейдет на место $2^k x \pmod{2^n - 1}$. Если колода пришла в первоначальное положение, то $2^k x \equiv x \pmod{2^n - 1}$ для любого x. Заметим, что при $k = n$ это равенство выполняется для всех x. Если же $k < n$, то для $x = 1$ это равенство не выполняется. Значит, $k = n$. □

6. (6) Пусть p — нечетное простое число. Пусть a_k — количество таких делителей d числа $kp + 1$, что $k \leqslant d \leqslant p$. Найдите $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$. *(Japan Mathematical Olympiad Finals 2016)*

Ответ: $p - 1$.

Рассмотрим произвольное m ($1 \leqslant m < p$). Докажем, что $p + 1, 2p + 1, \ldots, (m-1)p+1, mp+1$ принимают все остатки при делении на m ровно по одному разу. Предположим что какие-то два равны, тогда их разность, равная $(i - j)p$, должна делиться на m, тогда $i - j$ делится на m (так как

НОД$(m, p) = 1$), но $i - j$ не равно 0, и меньше m по модулю, следовательно, такого быть не может. Так как остатков m, то утверждение доказано.

Таким образом, ровно одно из этих чисел делится на m. Значит, каждое m увеличивает ровно одно из чисел a_i, так же $p+1$ делится на 1, и искомая сумма равна $p - 1$. □

7. (7) На квадратной доске размером 2018×2018 фишка стартовала из некоторой клетки и совершила обход, переходя каждый раз в соседнюю клетку и закончив в начальной клетке. При этом в каждую клетку она вошла ровно 1 раз. Для какого наименьшего k она может совершить такой обход, чтобы в каждый столбец и в каждую строку она вошла не более k раз?

(Canada National Olympiad 2015)

Ответ: 1010.

Докажем, что для доски $(4n + 2) \times (4n + 2)$ наименьшее k равно $2n + 2$. Действительно, каждым ходом мы входим либо в новый столбец, либо в новую строку. Значит, после $(4n+2)^2$ ходов сумма «входов» будет равна $(4n + 2)^2$. Так как суммарное количество строк и столбцов равно $8n + 4$, то либо в какую-то строку или какой-то столбец фишка войдет не менее $2n + 2$ раз, либо в каждую строку и каждый столбец войдет ровно $2n + 1$ раз.

Предположим второе. Рассмотрим какой-то боковой столбец или строку. После того, как фишка туда войдет, она как минимум еще один ход сделает вдоль этого столбца или строки. Значит, все участки маршрута в этом столбце или строке имеют длину минимум 1. Так как их $2n + 1$, то каждый из них должен иметь длину 1. Но в углу какой-то участок маршрута будет иметь длину 2, противоречие. Значит, минимальное $k = 2n + 2$.

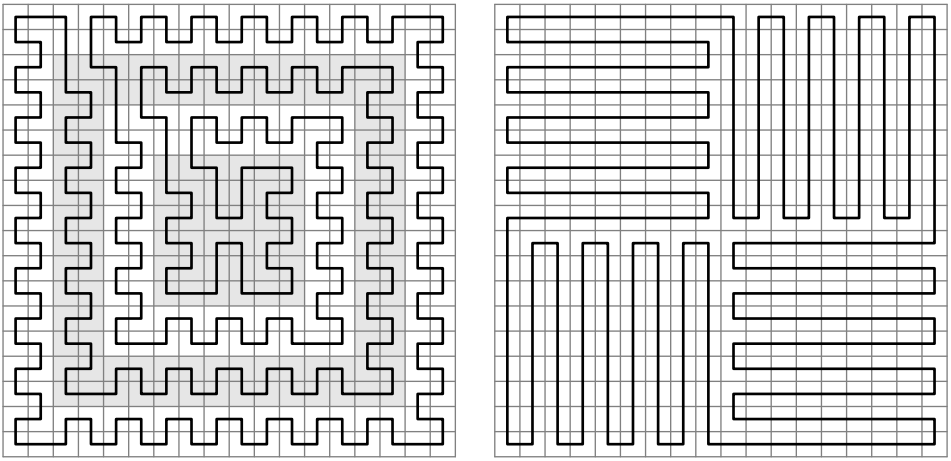


Рис. 6: к решению задачи 7.

Некоторые из возможных примеров изображены (для таблицы 18×18,

т. е. $n = 4$) на рис. 6. Легко видеть, что получается $k = 2n + 2$. □

8. (9) Пусть $x_1, \ldots, x_{100}$ неотрицательные действительные числа, такие что $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leqslant 1$ для всех $i = 1, \ldots, 100$ (считаем $x_{101} = x_1$ и $x_{102} = x_2$). Найдите максимальное возможное значение суммы

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}\,.$$

(Shortlist 2010)

Ответ: $25/2$.

Из условия следует, что $x_i \leqslant 1 - x_{i+1} - x_{i+2}$ и $x_{i+3} \leqslant 1 - x_{i+1} - x_{i+2}$, значит, $x_i x_{i+2} + x_{i+1} x_{i+3} \leqslant (1 - x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} + x_{i+2})$, что в свою очередь, не больше $\frac{1}{4}$ по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Значит, вся сумма не больше $50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{2}$. Если взять $x_{2i} = \frac{1}{2}$, $x_{2i+1} = 0$, то полученная оценка достигается. □

9. (9) На окружности ω с центром в точке O и радиусом R выбраны точки A и B такие, что $R < AB < 2R$. Окружность ω_1 с центром в точке A радиуса меньше R пересекает окружность ω в точках C и D, причем C лежит на меньшей дуге AB. Касательные, проведенные из точки B к окружности ω_1, касаются ее в точках E и F, причем E лежит вне окружности ω. Пусть M — пересечение прямых EC и DF. Докажите, что четырехугольник $BCFM$ вписанный.

(Greece National Olympiad 2014)

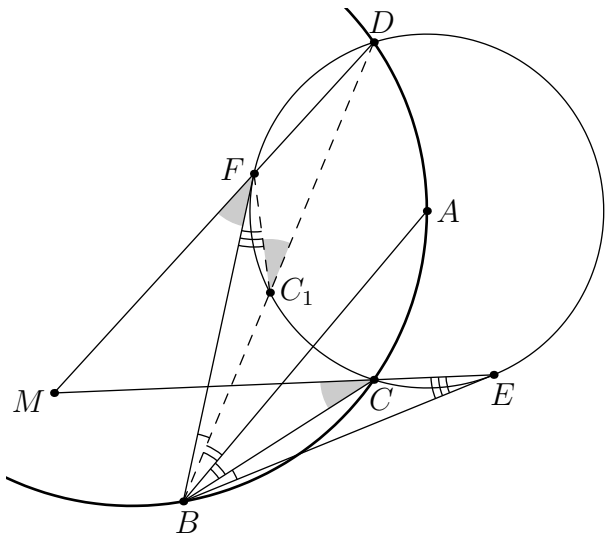


Рис. 7: к решению задачи 9.

Отметим C_1 — вторую точку пересечения прямой BD с окружностью ω_1 (рис. 7). Так как $AD = AC$ — радиусы, то $\angle CDA = \angle ACD = \beta$. Из впи-

санности четырехугольника $DACB$ получим, что $\angle DBA = \angle ACD = \beta$, $\angle CBA = \angle ADC = \beta$. Значит, C_1 симметрична C относительно BA. Тогда $\angle CEB = \angle C_1FB = \delta$. При этом $\angle CBE = \angle C_1BF = \alpha$. Тогда $\angle MCB = \delta + \alpha$ как внешний в треугольнике CEB. $\angle FC_1D = \alpha + \delta$ как внешний в треугольнике FC_1B. Заметим, что $\angle MFB = \angle FC_1D$, т. к. BF — касательная. Значит, $\angle MFB = \angle MCB$, т. е. $MFCB$ вписанный. □

10. (10) Дано натуральное число, большее 2017. Докажите, что его можно разложить в сумму нескольких неединичных натуральных слагаемых, произведение которых будет факториалом какого-нибудь натурального числа.

(А. Ф. Назмутдинов, по мотивам устного тура Турнира Городов 2012)

Представим число n в следующем виде: $n = 2+3+4+\ldots+(k-1)+k+p$, где $0 \leqslant p < k+1$. Если $p = 0$, то можно заменить все знаки плюс на знаки умножить и получить $k!$.

Извлечением выгоды назовем следующую операцию: заменим составное m на числа a, b, такие что $a \cdot b = m$. При этой операции *выгодой* назовем $m - a - b$ (она будет добавляться к p). Из любого чётного числа $m > 4$ можно извлечь выгоду, равную $\frac{m}{2} - 2$. Оценим выгоду, которую мы можем извлечь таким образом из чётных чисел. Заметим, что при любом $k > 13$ (а значит, и при любом $n > 105$)

$$1 + 2 + \ldots + \left(\left[\frac{k}{2}\right] - 3\right) + \left(\left[\frac{k}{2}\right] - 2\right) > k\,,$$

так как сумма последних двух слагаемых не меньше $k-6$, а сумма первых трех слагаемых 6. Мы доказали, что можем получить выгоду, большую чем k. Нетрудно видеть, что любое натуральное число меньшее k тоже можно получить, а значит, удастся получить и $k+1-p$. Извлечем выгоды ровно $k+1-p$, после чего заменим p на $k+1$, тогда сумма останется равной n, а произведение $(k+1)!$, что и требовалось. □