58. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Рио де Жанеиро, Бразил – уторак, 18. јул 2017.

1. За дати природан број $a_0 > 1$, дефинишимо низ a_0, a_1, a_2, ... тако да је за свако $n \geqslant 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако је } \sqrt{a_n} \text{ цео број,} \\ a_n + 3, & \text{у супротном.} \end{cases}$$

Одредити све вредности a_0 за које постоји број A такав да је $a_n = A$ за бесконачно много вредности n. *(Јужна Африка)*

2. Са Са $\mathbb{R}$ је означен скуп реалних бројева. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве x и y важи

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f(xy).$$

(Албанија)

3. Ловац и невидљиви зец играју игру у равни. Полазне тачке зеца и ловца, редом означене са A_0 и B_0, су исте. Након $n-1$ кругова игре, зец је у тачки A_{n-1}, а ловац у тачки B_{n-1}. У n-том кругу се догађа следеће, овим редом:

(i) Зец се неприметно помера у тачку A_n на растојању тачно 1 од тачке A_{n-1}.

(ii) Ловац на радару очитава тачку P_n. Једино што радар гарантује је да је растојање између тачака P_n и A_n највише 1.

(iii) Ловац се помера у тачку B_n на растојању тачно 1 од тачке B_{n-1}, што зец види.

Да ли ловац увек, ма какви били кретање зеца и извештаји са радара, може да се креће тако да осигура да после 10^9 кругова растојање између њега и зеца буде највише 100? *(Аустрија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

58. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Рио де Жанеиро, Бразил – среда, 19. јул 2017.

4. Дате су различите тачке R и S на кружници Ω тако да RS није њен пречник. Нека је ℓ тангента на кружницу Ω у тачки R. Тачка T је таква да је S средиште дужи RT. Тачка J на краћем луку RS кружнице Ω је таква да описана кружница Γ троугла JST сече праву ℓ у две различите тачке. Нека је A она од те две тачке која је ближа тачки R. Права AJ поново сече кружницу Ω у тачки K. Доказати да права KT додирује кружницу Γ. *(Луксембург)*

5. Дат је природан број $N \geqslant 2$. У реду се налази $N(N+1)$ фудбалера међусобно различитих висина. Шеф Вучко жели да уклони $N(N-1)$ играча, остављајући ред са $2N$ играча у коме је задовољено следећих N услова:

(1) између двојице највиших играча не стоји нико;

(2) између трећег и четвртог играча по висини не стоји нико;

⋮

(N) између двојице најнижих играча не стоји нико.

Доказати да се ово увек може извести. *(Русија)*

6. Уређени пар целих бројева (x, y) зовемо *примитивном тачком* ако је највећи заједнички делилац бројева x и y једнак 1. Нека је S коначан скуп примитивних тачака. Доказати да постоје природан број n и цели бројеви a_0, a_1, ..., a_n такви да за све тачке (x, y) из скупа S важи

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$ *(С.А.Д.)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. *Одговор:* сви природни бројеви дељиви са 3.

(1°) Ако је $a_m \equiv 2 \pmod 3$ за неко m, онда a_m није квадрат и $a_{m+1} = a_m + 3$. Индукцијом је $a_{m+i} = a_m + 3i$ за све $i \geqslant 0$, те низ вечно расте и није периодичан.

(2°) Ако је $a_0 \equiv 0 \pmod 3$, сви чланови низа су дељиви са 3. Нека је најмањи члан низа $a_m = 3k$. Ако је $k \geqslant 2$, онда је $(3k-3)^2 - 3k = 9k^2 - 21k + 9 > 0$, па први следећи квадрат није већи од $(3k-3)^2$, тако да је $a_n \leqslant 3k-3$ за неко n, контрадикција. Дакле, најмањи члан низа је 3, и у низу се надаље периодично понављају чланови $3, 6, 9, \dots$.

(3°) Нека је $a_0 \equiv 1 \pmod 3$ и нека је a_m најмањи члан низа. Јасно је да $3 \nmid a_m$. Претпоставимо да је $a_m \equiv 1 \pmod 3$, тј. $a_m = 3k+1$. Како је $(3k-1)^2 - (3k+1) = 9k^2 - 9k \geqslant 0$, први следећи квадрат није већи од $(3k-1)^2$; следи члан не већи од $3k-1$, контрадикција. Дакле, мора бити $a_m \equiv 2 \pmod 3$, тако да по (1°) низ није периодичан.

2. *Одговор:* $f(x) = k(x-1)$, где је $k \in \{-1, 0, 1\}$ константа.

Са $(*)$ означавамо дату функционалну једначину. Ако у њу заменимо $x = y = 0$, добијамо $f(f(0)^2) = 0$. С друге стране, ако је $f(a) = 0$ за неко $a \neq 1$, одаберимо $x = a$ и $y = \frac{a}{a-1}$ тако да је $xy = x + y$: тада $(*)$ даје $f(0) = f\big(f(a)f(\frac{a}{a-1})\big) = 0$, а онда замена $y = 0$ у $(*)$ даје $f(x) = 0$ за све x, што јесте решење.

Надаље сматрамо да је $f \neq 0$. Тада на основу претходног имамо

$$f(a) = 0 \quad \text{ако и само ако је} \quad a = 1.$$

Из $f(f(0)^2) = 0$ следи $f(0)^2 = 1$. Приметимо да, ако је функција f решење задатка, онда је то и функција $-f$. Зато можемо да сматрамо да је $f(0) = -1$. За $y = 1$ у $(*)$ добијамо $f(x+1) = f(x) + 1$. Индукцијом следи

$$f(x+n) = f(x) + n \quad \text{за све } n \in \mathbb{Z}.$$

Докажимо да је функција f инјективна. Нека је $f(a) = f(b)$. Тада је $f(a+n+1) = f(b+n)+1$ за сваки цео број n. Одаберимо $n < -b$. Тада је $(a+n+1)^2 - 4(b+n) > 0$, па постоје реални бројеви x и yтакви да је

$$x + y = a + n + 1 \quad \text{и} \quad xy = b + n.$$

Тада из $(*)$ имамо $f(f(x)f(y)) = f(b+n) - f(a+n+1) = -1$, а одатле $f(f(x)f(y)+1) = 0$. Сада следи $f(x)f(y) + 1 = 1$, тј. $f(x) = 0$ или $f(y) = 0$, што значи да је $x = 1$ или $y = 1$. Међутим, у том случају је $xy = x + y - 1$, тј. $a = b$.

Најзад, како $(*)$ за $x+y=n\in\mathbb{Z}$ даје $f(f(x)f(n-x))=f(nx-x^2)-f(n)=f(nx-x^2-n+1)=f((x-1)(n-x-1))$, због инјективности имамо

$$P(n)=f(x)f(n-x)=(x-1)(n-x-1),$$

па је $f(x)=P(1)-P(0)=x-1$. Ова функција задовољава услов $(*)$.

Друго решење. Ако је $f\not\equiv 0$, показује се као у првом решењу да је $f(1)=0$, $f(x)\neq 0$ за $x\neq 1$, без смањења општости $f(0)=-1$ и $f(x+1)=f(x)+1$. Такође, из $f\big(f(x)f(\frac{x}{x-1})\big)=0$ следи $\frac{1}{f(x)}=f(\frac{x}{x-1})$.

Доказаћемо да је скуп $A=f(\mathbb{R})$ затворен у односу на сабирање, одузимање и множење. Знамо да $a\in A\Rightarrow\frac{1}{a}\in A$. Нека су $a,b\in A$: $a=f(u)$, $b=f(v)$. За неко $n\in\mathbb{Z}$ систем $x+y=u+n$, $xy=v+n$ има реално решење, и тада је $b-a=f(v)-f(u)=f(v+n)-f(u+n)=f(f(x)f(y))\in A$. Даље, $0-a=-a\in A\Rightarrow b-(-a)=a+b\in A$. Сада је $\frac{4}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}\in A\Rightarrow\frac{x^2-1}{4}\in A$ за све $x\in A$, и одатле $ab=\frac{(a+b)^2-1}{4}-\frac{(a-b)^2-1}{4}\in A$.

Како за $y=0$ у $(*)$ добијамо $f(f(x))=f(x)-1$, имамо $f(t)=t-1$ за све $t\in A$. Пошто је по претходном $f(x)f(y)\in A$, имамо $f(xy)-f(x+y)=f(x)f(y)-1$. Сменом $g(t)=f(t)+1$ добијамо

$$g(xy)-g(x+y)=g(x)g(y)-g(x)-g(y). \qquad (\diamondsuit)$$

Одавде за $y=-1$ (пошто је $g(-1)=-1$) добијамо $g(-x)=-g(x)$. Даље, заменом x и y са $-x$ и $-y$ у $(\diamondsuit)$ добијамо $g(xy)+g(x+y)=g(x)g(y)+g(x)+g(y)$, што заједно са $(\diamondsuit)$ даје

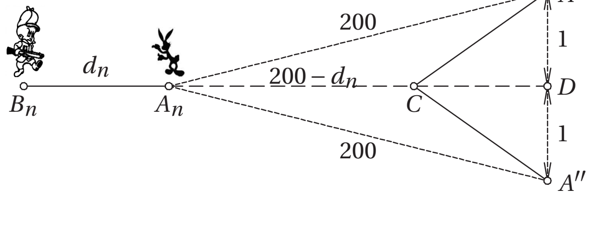
$$g(x+y)=g(x)+g(y) \quad \text{и} \quad g(xy)=g(x)g(y).$$

Одавде следи да је $g(x)=x$ и $f(x)=x-1$ за све x.

3. Одговор је *не*: сигнали са радара могу бити такви да ловац нема жељену стратегију.

Означимо са $d_n=A_nB_n$ растојање између зеца и ловца после n корака. Ако је $d_n\leqslant 100$, показаћемо да, уз помоћ радара и среће, у 200 корака зец може да увећа квадрат растојања од ловца за $\frac{1}{2}$.

Посматрајмо тачку C на полуправој B_nA_n такву да је $B_nC=200$ и тачке A' и A'' на одстојању 1 од праве B_nA_n и растојању 200 од тачке A_n (где је $\sphericalangle B_nA_nA'=\sphericalangle B_nA_nA''>90^\circ$). Зец може да одабере једну од тачака A' и A'' и направи 200 скокова право према њој. Међутим, како његово одстојање од праве B_nA_n за то време неће прећи 1, могуће је да сви сигнали $P_{n+1},P_{n+2},\dots,P_{n+200}$ буду на правој A_nB_n. Ловац након 200 корака стиже до тачке $B=B_{n+200}$ са $B_nB\leqslant 200$,



немајући начина да зна да ли је зец стигао до тачке A' или A''. Како је $\max\{BA', BA''\} \geqslant CA'$, ниједна стратегија ловцу неће гарантовати растојање мање од CA'. Другим речима, ловчева оптимална стратегија је да иде право ка тачки C.

Међутим, ако је D подножје нормале из A' на праву A_nB_n, лако израчунавамо $CA'^2 = CD^2 + 1 = (d_n - x)^2 + 1 = x^2 + 1 + d_n^2 - 2d_nx$, где је $x = 200 - \sqrt{200^2 - 1}$. Из $x > \frac{1}{400}$ и $x^2 + 1 = 400x$ следи

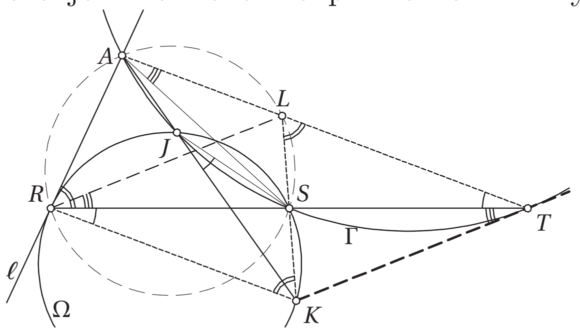
$$CA'^2 = d_n^2 + (400 - 2d_n)x > d_n^2 + \frac{1}{2}.$$

Према томе, стицајем срећних околности зец постиже да важи $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$. На овај начин, након $400 \cdot 100^2 = 4 \cdot 10^6$ корака зец може побећи ловцу на растојање веће од 100, ма какву стратегију ловац следио.

Напомена. Иако ловац нема победничку стратегију, нема је ни зец - његов успех зависи од среће и сигнала са радара.

Уз мало пажљивији рачун није тешко поправити оцену из задатка: ловац не може да обезбеди да након N корака растојање не буде веће од $\sqrt[3]{3N/8}$, што је $\approx 721,12$ за $N = 10^9$.

4. Из $\sphericalangle KRS = \sphericalangle KJS = \sphericalangle ATS$ следи $AT \parallel KR$. Нека је L тачка симетрична тачки K у односу на S. Четвороугао $RKTL$ је паралелограм, па L лежи на правој AT. Сада из $\sphericalangle ARS = \sphericalangle RKS = \sphericalangle TLS$ следи да је четвороугао $ARSL$ тетиван, а одатле је $\sphericalangle KTS = \sphericalangle LRS = \sphericalangle LAS = \sphericalangle TAS$, што значи да права KT додирује круг Γ.



Друго решење. Како је $\sphericalangle KRS = \sphericalangle KJS = \sphericalangle ATS$ и $\sphericalangle ARS = \sphericalangle RKS$, троуглови ART и SKR су слични. Одатле је $\frac{RT}{KR} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST}$, што заједно са једнакошћу $\sphericalangle ATS = \sphericalangle KRT$ даје $\triangle ATS \sim \triangle TRK$. Следи да је $\sphericalangle KTR = \sphericalangle TAS$, па права KT додирује круг Γ.

Напомена. Тврђење остаје на снази и ако је A друга пресечна тачка $\ell \cap \Gamma$.

5. Поделимо ред на N група са по $N+1$ узастопних играча и означимо са A_i и B_i редом највишег и другог највишег играча у i-тој групи. Нека је B_k највиши од свих играча $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Шеф Вучко уклања све играче A_i за $i \neq k$ и све играче k-те групе изузев B_k. Играчима A_k и B_k даје дресове и више се не враћа на њих: они су виши од свих преосталих играча у реду и између њих не стоји нико. Остаје још $N-1$ група са по N играча. Понављањем овог поступка N пута Вучко постиже циљ.

Напомена. За $N=2$ и $N=3$ оцена $N(N+1)$ се не може поправити, што показују распореди $1,5,3,4,2$ и $1,10,6,4,3,9,5,8,7,2,11$.

6. Нека је $S=\{(x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)\}$. Довољно је доказати да постоји хомоген полином $P(x,y)$ такав да је $P(x_i,y_i)=\pm 1$ за све i $(1\leqslant i\leqslant k)$: заиста, тада је $P(x_i,y_i)^2=1$ за све i. Даље, пошто за сваки хомоген полином P важи $P(-x,-y)=\pm P(x,y)$, можемо да сматрамо да је $(x_i,y_i)\neq(-x_j,-y_j)$ за све i,j; другим речима, никоје две тачке скупа S не леже на истој правој кроз координатни почетак.

Посматрајмо хомогене полиноме

$$G_i(x,y)=\prod_{j\neq i}(y_jx-x_jy),\qquad i=1,2,\dots,k.$$

Они су степена $k-1$ и задовољавају $G_i(x_j,y_j)=0$ за $j\neq i$ и $G_i(x_i,y_i)=c_i\neq 0$. Означимо $c=\text{нзс}[c_1,\dots,c_k]$. Постоје линеарни хомогени полиноми E_i такви да је $E_i(x_i,y_i)=1$ за $1\leqslant i\leqslant k$. Жељени полином P даћемо у облику

$$P(x,y)=F_c(x,y)-\sum_{i=1}^{k}b_iE_i(x,y)^{m-k+1}G_i(x,y),$$

где је F_c хомоген полином неког степена $m\geqslant k-1$ такав да је $F_c(x_i,y_i)\equiv 1 \pmod c$ за свако i, а $b_i=\frac{F_c(x_i,y_i)-1}{c_i}\in\mathbb{Z}$ одговарајуће константе. Потребно је само да се докаже да овакав полином F_c постоји.

Лема. За сваки природан број c постоји хомоген полином Q_c такав да за сваку примитивну тачку (x,y) важи $Q_c(x,y)\equiv 1 \pmod c$.

Доказ. У случају да је $c=p^\alpha$ степен простог броја, може се узети

$$F_c(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+xy+y^2\right)^{\varphi(c)} & \text{ако је } p=2;\\ \left(x^{p-1}+y^{p-1}\right)^{\varphi(c)} & \text{ако је } p>2.\end{cases}$$

Нека је сада $c=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ канонска факторизација броја c. Како су бројеви $c/p_i^{\alpha_i}$ $(i=1,\dots,r)$ узајамно прости, постоје цели бројеви $A_1,\dots,A_r$ такви да је $\sum_{i=1}^r A_i(c/p_i^{\alpha_i})=1$, а тада можемо узети

$$F_c(x,y)=\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{\alpha_i}}\cdot F_{p_i^{\alpha_i}}(x,y)\equiv\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{\alpha_i}}=1 \pmod c.\ \Box$$

Друго решење. Нека је опет $S=\{(x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)\}$. Тврђење доказујемо индукцијом по k. Случај $k=1$ је тривијалан. Нека је $k\geqslant 2$. По индуктивној претпоставци постоје хомогени полиноми $Q(x,y)$ и $R(x,y)$ са целим коефицијентима такви да је

$$Q(x_i,y_i)=1 \text{ за } i\neq k-1 \quad\text{и}\quad R(x_i,y_i)=1 \text{ за } i\neq k \quad (1\leqslant i\leqslant k).$$

Тражени полином $P(x,y)=\sum_j a_jx^{n-j}y^j$ тражимо у облику $P(x,y)=F(Q(x,y),R(x,y))$, где је $F(u,v)$ неки хомоген полином. Ако је $Q(x_{k-1},y_{k-1})=a$ и $R(x_k,y_k)=b$, важи

$$P(x_i, y_i) = \begin{cases} F(1,1) & \text{за } i = 1,2,\ldots,k-2, \\ F(a,1) & \text{за } i = k-1, \\ F(1,b) & \text{за } i = k. \end{cases}$$

Дакле, довољно је доказати да постоји хомоген полином $F \in \mathbb{Z}[x,y]$ такав да је

$$F(1,1) = F(a,1) = F(1,b) = 1.$$

Сматрамо да је $|b| > 1$: у супротном ћемо узети $F(x,y) = (x-y)(x-ay)(x+y)^2 + y^4$. Напишимо $F(x,y) = y^m \cdot f(\frac{x}{y})$, где је $f \in \mathbb{Z}[x]$ и $m = \deg f$. Треба да важи $f(1) = f(a) = 1$ и $f(\frac{1}{b}) = \frac{1}{b^m}$, па је довољно наћи полином $g \in \mathbb{Z}[x]$ степена $m-2$ такав да је

$$f(t) = (t-1)(t-a)g(t) + 1, \quad \text{при чему је} \quad g\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b^{m-2}} \cdot \frac{b^m - 1}{(b-1)(ab-1)}.$$

Овакав полином g постоји ако и само ако $(b-1)(ab-1)$ дели $b^m - 1$, тако да се може узети $m = \varphi(|b-1| \cdot |ab-1|)$ и индукција је готова.

Напомена. Из конструкције полинома F у другом решењу следи да минимални степен n траженог полинома није ограничен у зависности од k.