

Уторак, 18. јул 2017.

1. задатак. За дати природан број $a_0 > 1$, дефинишимо низ a_0, a_1, a_2, \dots тако да је за свако $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако је } \sqrt{a_n} \text{ цео број,} \\ a_n + 3, & \text{у супротном.} \end{cases}$$

Одредити све вредности a_0 за које постоји број A такав да је $a_n = A$ за бесконачно много вредности n .

2. задатак. Са \mathbb{R} је означен скуп реалних бројева. Одредити све функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве x и y важи

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

3. задатак. Ловац и невидљиви зец играју игру у равни. Полазне тачке зеца и ловца, редом означене са A_0 и B_0 , су исте. Након $n - 1$ кругова игре, зец је у тачки A_{n-1} , а ловац у тачки B_{n-1} . У n -том кругу се догађа следеће, овим редом:

- (i) Зец се неприметно помера у тачку A_n на растојању тачно 1 од тачке A_{n-1} .
- (ii) Ловац на радару читава тачку P_n . Једино што радар гарантује је да је растојање између тачака P_n и A_n највише 1.
- (iii) Ловац се помера у тачку B_n на растојању тачно 1 од тачке B_{n-1} , што зец види.

Да ли ловац увек, ма какви били кретање зеца и извештаји са радара, може да се креће тако да осигура да после 10^9 кругова растојање између њега и зеца буде највише 100?

Среда, 19. јул 2017.

4. задатак. Дате су различите тачке R и S на кружности Ω тако да RS није њен пречник. Нека је ℓ тангента на кружницу Ω у тачки R . Тачка T је таква да је S средиште дужи RT . Тачка J на краћем луку RS кружнице Ω је таква да описана кружница Γ троугла JST сече праву ℓ у две различите тачке. Нека је A она од те две тачке која је ближа тачки R . Права AJ поново сече кружницу Ω у тачки K . Доказати да права KT додирује кружницу Γ .

5. задатак. Дат је природан број $N \geq 2$. У реду се налази $N(N+1)$ фудбалера међусобно различитих висина. Шеф Вучко жели да уклони $N(N-1)$ играча, остављајући ред са $2N$ играча у коме је задовољено следећих N услова:

- (1) између двојице највиших играча не стоји нико;
- (2) између трећег и четвртог играча по висини не стоји нико;
- ⋮
- (N) између двојице најнижих играча не стоји нико.

Доказати да се ово увек може извести.

6. задатак. Уређени пар целих бројева (x, y) зовемо *примитивном тачком* ако је највећи заједнички делилац бројева x и y једнак 1. Нека је S коначан скуп примитивних тачака. Доказати да постоје природан број n и цели бројеви a_0, a_1, \dots, a_n такви да за све тачке (x, y) из скупа S важи

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$