2-га Олимпијада метропола

Математика · Први дан: 5.9.2017.

1. задатак. Нека је $ABCD$ паралелограм у коме је угао код темена B туп и $AD > AB$. На дијагонали AC одабране су тачке K и L тако да је $\angle ABK = \angle ADL$ (тачке A, K, L и C су различите и K лежи између A и L). Права BK сече описани круг ω троугла ABC у тачкама B и E, а права EL сече круг ω у тачкама E и F. Доказати да важи $BF \parallel AC$.

2. задатак. У некој земљи, неки парови градова су повезани директним двосмерним авионским линијама. Из сваког града може се доћи до сваког другог низом од највише 100 летова. Такође, из сваког града се може доћи до сваког другог низом са парним бројем летова. За које најмање d се са сигурношћу може тврдити да се из сваког града може стићи до сваког другог низом са парним бројем летова не већим од d?

(Дозвољено је користити исту линију или проћи кроз исти град више пута.)

3. задатак. Дат је квадратни полином $Q(t)$ који има две различите реалне нуле. Доказати да постоји неконстантан полином $P(x)$ са водећим коефицијентом 1 такав да су сви коефицијенти полинома $Q(P(x))$, осим можда водећег, мањи од 0,001 по апсолутној вредности.

2-га Олимпијада метропола

Математика · Други дан: 6.9.2017.

4. задатак. Наћи највећи природан број N за који је могуће одабрати N различитих бројева из скупа $\{1, 2, \ldots, 100\}$ тако да ни збир ни производ било која два различита одабрана броја нису дељиви са 100.

5. задатак. Природни бројеви x и y, већи од 1, су такви да важи

$$[x+2, y+2] - [x+1, y+1] = [x+1, y+1] - [x, y]\,.$$

Доказати да је један од бројева x и y дељив другим.

(Са $[a, b]$ је означен најмањи заједнички садржалац бројева a и b.)

6. задатак. Нека је $ABCDEF$ тетиван и тангентан конвексан шестоугао и нека су ω_A, ω_B, ω_C, ω_D, ω_E и ω_F редом кругови уписани у троуглове FAB, ABC, BCD, CDE, DEF и EFA. Означимо са ℓ_{AB} спољашњу заједничку тангенту кругова ω_A и ω_B различиту од праве AB. Аналогно уводимо праве ℓ_{BC}, ℓ_{CD}, ℓ_{DE}, ℓ_{EF} и ℓ_{FA}. Нека се праве ℓ_{FA} и ℓ_{AB} секу у тачки A_1. Аналогно су одређене тачке B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1.

Претпоставимо да је $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ конвексан шестоугао. Доказати да се његове дијагонале A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 секу у једној тачки.