

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА  
МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

21. мај 2017.

Први дан

1. Дат је  $\triangle ABC$ . Тачка  $D$  је средиште странице  $BC$ , а на страницама  $AC$  и  $AB$  уочене су тачке  $E$  и  $F$ , редом, такве да важи  $DE = DF$  и  $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$ . Доказати:

$$DE \geq \frac{AB + AC}{4}. \quad (\text{Душан Ђукић})$$

2. Назовимо *корак*ом функцију која уређен пар природних бројева  $(x, y)$  коме је тачно једна координата парна пресликава у пар  $(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2})$  ако  $2 \mid x$ , односно у пар  $(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2})$  ако  $2 \mid y$ . Доказати да за сваки непаран природан број  $n$ ,  $n > 1$ , постоји паран природан број  $b$ ,  $b < n$ , такав да се sukcesивном применом коначно много корака од уређеног пара  $(n, b)$  добија уређен пар  $(b, n)$ .  
(Бојан Башић)

3. За функцију  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  кажемо да је *живахна* ако за све  $a, b \in \mathbb{N}$  важи

$$f(a + b - 1) = \underbrace{f(f(\dots f(b) \dots))}_a \text{ пута}.$$

Нека је  $g$  живахна функција таква да за неко  $A \geq 2$  важи  $g(A + 2018) = g(A) + 1$ .

(a) Доказати да је за све  $n \geq A + 2$  испуњено  $g(n + 2017^{2017}) = g(n)$ .

(b) Ако важи  $g(A + 2017^{2017}) \neq g(A)$ , одредити  $g(n)$  за  $n \leq A - 1$ .

(Марко Радовановић)

Време за рад 270 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА  
МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

22. мај 2017.

Други дан

4. Квадрат  $n \times n$  је подељен на јединичне квадрате. Потребно је на њега поставити одређен број једнакокрако-правоуглих троуглова хипотенузе 2, с теменима у теменима јединичних квадрата, на такав начин да свака страна сваког јединичног квадрата припада тачно једном троуглу (тј. лежи у унутрашњости или на рубу). Одредити све вредности  $n$  за које је ово могуће. (Душан Букић)

5. За дати природан број  $n \geq 2$ , нека је  $C(n)$  најмања позитивна реална константа за коју постоји  $n$  реалних бројева  $x_1, x_2, \dots, x_n$  који нису сви нула и задовољавају услове:

(i)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ ;

(ii) за свако  $i = 1, 2, \dots, n$  важи  $x_i \leq x_{i+1}$  или  $x_i \leq x_{i+1} + C(n)x_{i+2}$  (где индексе узимамо по модулу  $n$ ).

Доказати:

(a)  $C(n) \geq 2$  за све  $n$ ;

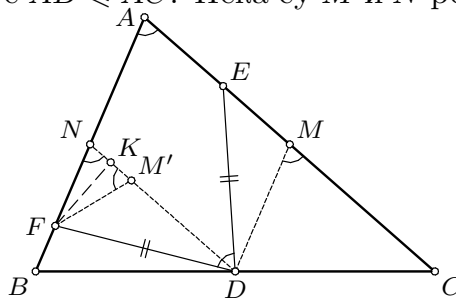
(b)  $C(n) = 2$  ако и само ако је  $n$  паран број. (Душан Букић)

6. За дати природан број  $k$  уочимо најмањи природан број  $n$  који има тачно  $k$  делилаца. Ако је  $n$  потпун куб, да ли  $k$  може бити дељив неким простим бројем облика  $3j + 2$ ? (Бојан Башић)

Време за рад 270 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.  
Сваки задатак вреди 7 бодова.

## РЕШЕЊА

1. Претпоставимо без смањења општости да је  $AB \leq AC$ . Нека су  $M$  и  $N$  редом средишта страница  $AC$  и  $AB$ , а  $M'$  тачка на дужи  $DN$  таква да је  $DM' = DM$ . Како је  $\sphericalangle M'DF = \sphericalangle MDE$ , троуглови  $DME$  и  $DM'F$  су подударни, па је  $\sphericalangle FM'N = 180^\circ - \sphericalangle DM'F = 180^\circ - \sphericalangle DME = \sphericalangle BAC = \sphericalangle FNM'$ , што значи да је троугао  $FM'N$  једнакокраки. Средиште  $K$  дужи  $M'N$  је уједно и подножје нормале из тачке  $F$  на  $M'N$ , одакле следи  $DF \geq DK = \frac{DM' + DN}{2} = \frac{AB + AC}{4}$ .



Друго решење. Нека је  $E$  на дужи  $AM$ . Означимо  $x = \sphericalangle MDE = \sphericalangle NDF$ . Синусна теорема у  $\triangle MDE$  и  $\triangle NDF$  даје  $\frac{DM}{DE} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin \alpha}$  и  $\frac{DN}{DF} = \frac{\sin(\alpha + x)}{\sin \alpha}$ , па је  $\frac{b+c}{4DE} = \frac{DM+DN}{2DE} = \frac{\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha-x)}{2\sin \alpha} = \cos x \leq 1$ .

Напомена. Важи  $4DE = \sqrt{(b+c)^2 + (b-c)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

2. Нека се после  $k$  корака добија пар  $(x_k, y_k)$ . Збир  $x_k + y_k$  се не мења током процеса и остаје једнак  $s = n + b$ . Како је  $2 \cdot (x + \frac{y}{2}) \equiv 2 \cdot \frac{x}{2} \equiv x \pmod{x+y}$ , важи  $2x_k \equiv x_{k-1} \pmod{s}$ . Индукција нам даје

$$2^k x_k \equiv x_0 = n \pmod{s}.$$

Пошто је  $(s, 2^k) = 1$ , довољно је доказати да постоји непаран број  $s$ ,  $n < s < 2n$ , такав да за неко  $k$  важи  $2^k b \equiv n \pmod{s}$ , тј.  $(2^k + 1)n \equiv 0 \pmod{s}$ . За ово је опет довољно узети  $s = 2^r + 1$  и  $k = r$ , где је  $2^{r-1} < n < 2^r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ). Тада је  $b = 2^r + 1 - n$ .

Напомена. Може се узети произвољно  $s$ , под условом да постоји  $k \in \mathbb{N}$  такво да  $s \mid 2^k + 1$ . На пример,  $s = 3^m 11^n$  за  $m, n \in \mathbb{N}_0$  задовољава овај услов, одакле се може закључити да за произвољне константе  $0 < \alpha < \beta$  и све довољно велике бројеве  $n$  постоји тражено  $b$  у интервалу  $(\alpha n, \beta n)$ .

3. Ако је  $g(a) = g(a+d)$  за неке  $a, d \in \mathbb{N}$ , по услову задатка је  $g(a+n) = g^{n+1}(a) = g^{n+1}(a+d) = g(a+n+d)$ , што значи да је функција  $g(x)$  за  $x \geq a$  периодична са периодом  $d$ . Овакви  $a$  и  $d$  свакако постоје, јер је  $g(A+2019) = g(g(A+2018)) = g(g(A) + 1) = g(g(g(A))) = g(A+2)$ , па по претходном важи  $g(n+2017) = g(n)$  за  $n \geq A+2$ . Посматрајмо најмање  $d$  за које овакво  $a$  постоји; нека је  $a = a_0$  најмање такво  $a$ . Због минималности периода  $d$ , за  $x, y \geq a_0$  важи  $g(x) = g(y)$  ако и само ако  $d \mid x - y$ . Јасно је да  $d \mid 2017$ .

Одмах имамо  $g(n+2017^{2017}) = g(n)$  за  $n \geq A+2$ . С друге стране, дато је да је  $g(A+2017^{2017}) \neq g(A)$ , па је  $A \leq a_0 - 1$ , тј.  $a_0 \in \{A+1, A+2\}$ .

Претпоставимо да је  $g(a') = g(a' + d')$  за неко  $a' \leq a_0 - 1$  и неко  $d' \in \mathbb{N}$ . Како тада функција  $g(x)$  има период  $d'$  за  $x \geq a'$ , следи да  $d \mid d'$ , али тада је  $g(a_0 - 1) = g(a_0 - 1 + d') = g(a_0 - 1 + d)$ , што је у контрадикцији са избором  $a_0$ . Према томе, ако је  $g(x) = g(y)$  и  $x \leq a_0 - 1$ , онда је  $x = y$ . Сада из  $g(g(n)) = g(n + 1)$  за  $n + 1 \leq A \leq a_0 - 1$  следи  $g(n) = n + 1$ .

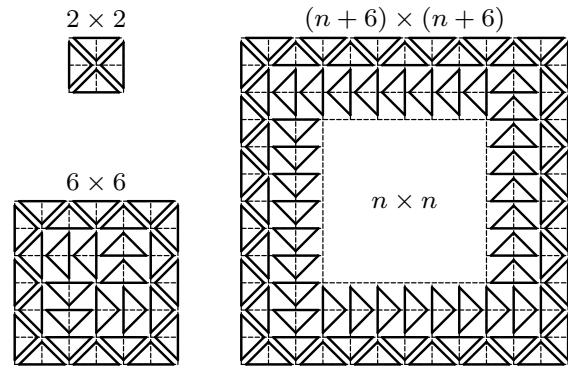
Напомена. За  $n \geq a_0 - 1$ , из  $g(g(n)) = g(n + 1)$  следи  $g(n) \equiv n + 1 \pmod{d}$ . Тако свака живахна функција  $g$  има облик

$$g(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{ако је } n \leq a_0 - 2; \\ a_0 + \alpha d & \text{ако је } n = a_0 - 1; \\ a_0 + i + \beta_i d & \text{ако је } n \geq a_0 \text{ и } n \equiv a_0 + i \pmod{d}, 0 \leq i < d - 1, \end{cases}$$

где су  $\alpha, \beta_0, \dots, \beta_{d-1}$  произвољни природни бројеви. Лако се проверава да је оваква функција заиста живахна.

4. Јединичних дужи има  $2n(n + 1)$ , а сваки троугао покрива три, па мора бити  $3 \mid 2n(n + 1)$ , тј.  $n \equiv 0$  или  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Такође, дужи на ивици великог квадрата могу бити покривене једино хипотенузама, па мора бити  $2 \mid n$ . Према томе,  $n \equiv 0$  или  $n \equiv 2 \pmod{6}$ .

На слици лево приказана су одговарајућа постављања троуглова за  $n = 2$  и  $n = 6$ , док је десно показано да, кад год је овакво постављање могуће за квадрат  $n \times n$ , оно је могуће и за  $(n + 6) \times (n + 6)$ . Једноставном индукцијом следи да је оно могуће кад год је  $n = 6k$  или  $n = 6k - 4$  за неко  $k \in \mathbb{N}$ .



5. У низу не постоје два узастопна негативна члана. Заиста, ако је  $x_{i-1} > 0 \geq x_i, x_{i+1}$ , онда је  $x_{i-1} > \max\{x_i, x_i + C(n)x_{i+1}\}$ , противно услову (ii). Дакле, низ се састоји од блокова позитивних чланова раздвојених по једним непозитивним чланом.

Посматрајмо произвољан блок позитивних чланова  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l-1}$ . Чланове  $x_k$  и  $x_{k+l-1}$  зовећемо редом почетним и крајњим. Означимо са  $P$  збир свих почетних чланова у низу, са  $K$  збир свих крајњих, са  $N$  збир свих непозитивних, а са  $S$  збир свих позитивних који нису почетни или крајњи.

Сабирањем неједнакости  $x_{k+l-1} \leq x_{k+l} + C(n)x_{k+l+1}$  по свим блоковима добијамо  $K \leq N + C(n)P$ , што се због  $N = -K - S - P$  своди на

$$2K \leq (C(n) - 1)P - S. \quad (*)$$

Претпоставимо да је  $C(n) \leq 2$ . Сабирањем неједнакости  $x_{k+2i} \leq x_{k+2i+1} + 2x_{k+2i+2}$  за  $0 \leq i \leq \lfloor \frac{l-3}{2} \rfloor$  и неједнакости  $x_{k+l-2} \leq 2x_{k+l-1}$  у случају  $2 \mid l$  добијамо  $x_k \leq x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{k+l-2} + 2x_{k+l-1}$ . Сабирањем по свим блоковима добијамо

$$P \leq S + 2K. \quad (**)$$

Овде је једнакост могућа само ако је дужина блока непарна. Заиста, ако  $2 \mid l$ , све сабране неједнакости морају бити једнакости, па је тада  $x_{k+l-2} = 2x_{k+l-1}$ , али то је немогуће јер је  $x_{k+l-2} \leq x_{k+l-1} > 0$ .

Сабирање (\*) и (\*\*) даје  $0 \leq (C(n) - 2)P$ , па како је  $P > 0$ , следи  $C(n) \geq 2$ . Шта више, ако је  $C(n) = 2$ , сви блокови имају непарну дужину, одакле следи да је  $n$  парно. Да је  $C(n) = 2$  за парно  $n$  показује пример  $x_r = (-1)^r$ .

Напомена. Дати пример за  $2 \mid n$  није једини: на пример, за  $n = 4$  може се узети  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3a + 2b, a, a + b, -5a - 3b)$  за  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 0$ . Такође, показује се да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = 2$ . При томе је нпр.  $C(3) = 3$  и  $C(5) = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ .

6. Претпоставимо да такво  $k$  постоји. Нека је  $p_1 < p_2 < \dots$  низ свих простих бројева и нека је  $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$  ( $\alpha_m > 0$ ), при чему је  $k = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_m + 1)$  и  $3 \mid \alpha_i$  за све  $i$ . Због минималности броја  $n$  важи  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_m > 0$ .

Лема. Нека је  $\alpha_r + 1 = ab$  за  $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Ако важи  $p_s < p_r^a < p_{s+1}$ , онда је  $\alpha_s \geq b - 1 \geq \alpha_{s+1}$ .

Доказ. Број  $n_1 = p_r^{(\alpha_s+1)a-1} p_s^{b-1} \prod_{i \notin \{r,s\}} p_i^{r_i}$  такође има  $k$  делилаца, и зато важи  $n_1 \geq n$ . Међутим, ово се своди на  $(p_r^a/p_s)^{\alpha_s-b+1} \geq 1$ , тј.  $\alpha_s \geq b - 1$ .

Слично, из  $n'_1 = p_r^{(\alpha_{s+1}+1)a-1} p_{s+1}^{b-1} \prod_{i \notin \{r,s+1\}} p_i^{r_i} \geq n$  следи  $\alpha_{s+1} \leq b - 1$ .  $\square$

Посматрајмо највеће  $r$  такво да је  $\alpha_r + 1 = ab$  за неке  $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$ ; нека су  $s$  и  $t$  такви да је  $p_s < p_r^a < p_{s+1}$  и  $p_t < p_r^b < p_{t+1}$ . Приметимо да је тада по Бертрановом ставу  $\frac{1}{2}p_r^a < p_s$  и  $p_{s+1} < 2p_r^a$ , дакле

$$p_r^{a-1} < p_s < p_r^a < p_{s+1} < p_r^{a+1} \quad \text{и аналогно} \quad p_r^{b-1} < p_t < p_r^b < p_{t+1} < p_r^{b+1}.$$

Одавде је  $s, t > r$ . На сличан начин следи и  $|s - t| \neq 1$ .

На основу Леме (и због  $3 \mid \alpha_i$ ) је  $\alpha_s > b - 1 > \alpha_{s+1}$  и  $\alpha_t > a - 1 > \alpha_{t+1}$ . Број  $n_2 = p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-1} p_s^{b-1} p_{t+1}^{a-1} \prod_{i \notin \{r,s,t+1\}} p_i^{r_i}$  такође има  $k$  делилаца, тако да је  $n_2 \geq n$ , тј.

$$1 \leq \frac{n_2}{n} = \frac{p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-ab} p_{t+1}^{a-1-\alpha_{t+1}}}{p_s^{\alpha_s-b+1}} < \frac{p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-ab+(b+1)(a-1-\alpha_{t+1})}}{p_r^{(a-1)(\alpha_s-b+1)}} \\ = p_r^{1-(\alpha_s-b)(a-2-\alpha_{t+1})},$$

одакле је  $(\alpha_s - b)(a - 2 - \alpha_{t+1}) < 1$ . Како је  $3 \mid \alpha_s \neq b$ , мора бити  $\alpha_{t+1} = a - 2$ . По претпоставци, за  $i > r$ ,  $\alpha_i + 1$  нема факторе облика  $3j + 2$ , те мора бити непарно. Између осталог,  $2 \mid \alpha_{t+1}$ , па  $2 \mid a$ . Аналогно  $2 \mid b$ , па је  $\alpha_r = 4c - 1$  за неко  $c \in \mathbb{N}$ .

Како из  $2 \mid \alpha_m$  следи  $\alpha_m > 3 > 1 > \alpha_{m+1} = 0$ , сада по Лемима за  $(a, b) = (2, 2c)$  и  $(a, b) = (4, c)$  редом добијамо  $p_m < p_r^{2c} < p_{m+1}$  и  $p_m < p_r^c < p_{m+1}$ . Међутим, ово је немогуће јер по Бертрановом постулату интервал  $(p_r^c, p_r^{2c})$  садржи бар један прост број.

