ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ ЗА ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 19. новембар 2016.

1. Доказати да за све ненегативне реалне бројеве a, b и c важи неједнакост

$$a\sqrt{(a+b)(a+c)}+b\sqrt{(b+c)(b+a)}+c\sqrt{(c+a)(c+b)} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}{2}.$$

2. Наћи све парове природних бројева a и b такве да је

$$\text{НЗС}(a+1,b+1)=a^2-b^2.$$

3. Уписани круг троугла ABC са центром у тачки I додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F. Нека је AA' пречник описаног круга троугла ABC, а K подножје нормале из тачке D на праву EF. Доказати да су тачке A', I и K колинеарне.

4. На полици се налази n књига означених бројевима $1,2,\ldots,n$, поређаних у неком редоследу. Библиотекар у сваком кораку бира неку књигу k која је на ℓ-том месту слева, тако да важи $\ell > k$ (ако таква постоји), вади је из реда, све књиге од k-тог до $(\ell-1)$-тог места у реду помера за једно место удесно, а извађену књигу ставља на k-то место.

(На пример, ако су на полици редом књиге $4,3,1,2$, он може да извади и премести нпр. књигу 2, чиме ће добити редослед $4,2,3,1$.)

(а) Доказати да ће после највише $2^{n-1}-1$ корака књиге бити у исправном редоследу (тј. $1,2,\ldots,n$ слева надесно).

(б) Доказати да је, за неки почетни распоред књига, могуће да после $2^{n-1}-2$ корака књиге не буду у исправном редоследу.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

1. Уведимо смену $b+c=x^2$, $c+a=y^2$ и $a+b=z^2$. Тада је $2a=y^2+z^2-x^2$ итд. и $a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca=(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$, па тражена неједнакост постаје

$$(x^2+y^2-z^2)xy+(y^2+z^2-x^2)yz+(z^2+x^2-y^2)zx \geqslant x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2.$$

Како је $(x^2+y^2)xy \geqslant 2x^2y^2$ и $z^2xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2z^2+y^2z^2)$, имамо $(x^2+y^2-z^2)xy \geqslant 2x^2y^2-\frac{1}{2}(x^2z^2+y^2z^2)$ и аналогне неједнакости за преостала два сабирка. Сабирањем добијамо тражену неједнакост.

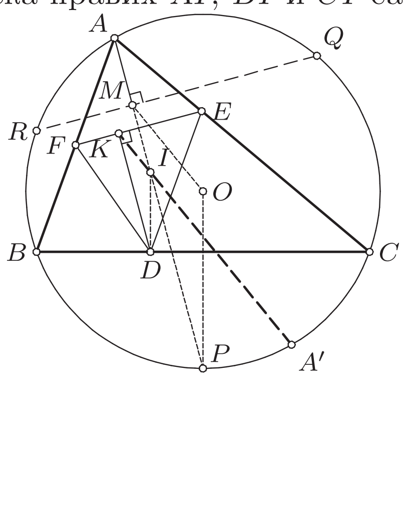
Друго решење. На основу Хелдерове неједнакости важи

$$L^2 \cdot M \geqslant (a+b+c)^3, \qquad (*)$$

при чему је $L=a\sqrt{(a+b)(a+c)}+b\sqrt{(b+c)(b+a)}+c\sqrt{(c+a)(c+b)}$ и $M=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+a)(b+c)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$.
С друге стране, како је $9(a+b)(a+c)(b+c)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)-6abc \geqslant 0$, важи $M=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}$, па тако $(*)$ постаје $L^2 \geqslant \frac{4}{9}(a+b+c)^4$, тј. $L \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)^2 \geqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)$.

2. Нека је $a+1=dx$ и $b+1=dy$, где су d,x,y природни бројеви, $x>y$ и НЗД$(x,y)=1$. Тада је НЗС$(a+1,b+1)=dxy=(dx-1)^2-(dy-1)^2=d(x-y)(dx+dy-2)$ и одатле $dx+dy-2=\frac{xy}{x-y}$. Како је $x-y$ узајамно просто и са x и са y, мора бити $x-y=1$. Претходна једнакост постаје $d(2x-1)-2=x(x-1)$, па $2x-1 \mid x^2-x+2 \mid (2x-1)^2+7$, дакле $2x-1 \mid 7$, тј. $x=1$ или $x=4$. Прва могућност очигледно отпада, а друга даје $d=2$ и $(a,b)=(7,5)$.

3. Нека су P, Q и R редом друге тачке пресека правих AI, BI и CI са описаним кругом троугла ABC. Знамо да је $QA=QC=QI$ и $RA=RB=RI$, па је QR симетрала дужи AI и пролази кроз њено средиште M. Даље, пошто је $PQ \parallel DE$, $PR \parallel DF$ и $QR \parallel EF$, троугао PQR је сличан троуглу DEF, и при тој сличности тачкама O и M редом одговарају тачке I и K. Следи да су троуглови POM и DIK слични и одатле



$IK \parallel OM$. Како је такође $OM \parallel A'I$ као средња линија у $\triangle AA'I$, тачке A', I и K су колинеарне.

Друго решење. Означимо са D_1, E_1 и F_1 редом средишта дужи EF, FD и DE, са k описани круг $\triangle ABC$, и са γ Ојлеров круг $\triangle DEF$. Посматрајмо инверзију Ψ у односу на уписани круг $\triangle ABC$. Имамо $\Psi(D_1) = A$, $\Psi(E_1) = B$ и $\Psi(F_1) = C$, па је $\Psi(\gamma) = k$. Како је $K \in \gamma$, следи да је $K' = \Psi(K) \in k$. Притом је $\sphericalangle IK'A = \sphericalangle ID_1K = 90^\circ = \sphericalangle A'K'A$, одакле следи колинеарност тачака A', I, K, K'.

4. **(а)** Књигу 1 библиотекар може да премести највише једном. Индукцијом се показује да књига k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ може бити премештена највише 2^{k-1} пута. Заиста, након првог премештања књиге k, њена позиција се може пореметити само приликом премештања неке књиге i за $i < k$, што се по индуктивној претпоставци може догодити највише $\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} = 2^{k-1} - 1$ пута. Притом књига n никад неће бити премештена, па је укупан број корака највише $\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{n-1} - 1$.

(б) Ако је полазни распоред књига $n, 1, 2, \dots, n-1$ и библиотекар увек бира најдешњу дозвољену књигу, требаће му тачно $2^{n-1} - 1$ корака.

Показујемо индукцијом по k да, ако су у неком моменту последњих $k+1$ књига редом $x, n-k, n-k+1, \dots, n-1$, онда ће након $2^k - 1$ корака њихов редослед бити $n-k, n-k+1, \dots, n-1, x$, док се књиге лево од њих неће променити. Ово је тачно за $k = 1$. Ако је $k > 1$, онда по индуктивној претпоставци након $2^{k-1} - 1$ корака имамо редослед $x, n-k+1, \dots, n-1, n-k$, након следећег корака $n-k, x, n-k+1, \dots, n-1$, па тако после још $2^{k-1} - 1$ корака (укупно $2^k - 1$) добијамо редослед $n-k, n-k+1, \dots, n-1, x$.