Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

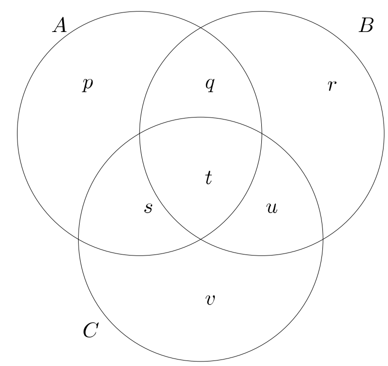
Решења задатака

Први разред – А категорија

1. Означимо са p, q, r, s, t, u и v кардиналности одговарајућих делова Веновог дијаграма као на слици. Тада имамо $|A\triangle C| = p+q+u+v$, $|B\triangle C| = q+r+s+v$ и $|A\triangle B| = p+s+r+u$. Дакле, једнакост из поставке преводи се на

$$p+2q+r+s+u+2v = p+s+r+u,$$

што се своди на $2q+2v=0$, а одавде добијамо $q=v=0$. Но, $q=0$ даје управо $A\cap B\subseteq C$, а $v=0$ даје $C\subseteq A\cup B$, што је и требало доказати.



Оп 2015 1А 1

2. Обојимо првих 2015 столица произвољно. У тачно једном од два могућа бојења преостале столице број посматраних парова биће паран. Зато је тражени број 2^{2015}.

3. Ако је тачка A_3 средиште дужи A_1A_2, лако се види да је она истовремено средиште странице BC. Стога се у $\triangle ABC$ његово тежиште T налази на дужи AA_3, па ако су K и L пресеци AA_3 са дужима MQ и NP, довољно је доказати да се T налази између K и L (пошто је четвороугао $MNPQ$ очито конвексан). Означимо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{y}$. Како се тачка K налази на дужи B_1C_1, важи

$$\overrightarrow{AK} = m\overrightarrow{AC_1} + (1-m)\overrightarrow{AB_1} = \frac{2015m}{3015}\overrightarrow{x} + \frac{2015(1-m)}{3031}\overrightarrow{y}$$

за неко $m\in(0,1)$. С друге стране, пошто је вектор $\overrightarrow{AK}$ колинеаран са $\overrightarrow{AA_3}$, важи

$$\overrightarrow{AK} = q\overrightarrow{AA_3} = \frac{q}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{q}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{q}{2}\overrightarrow{x} + \frac{q}{2}\overrightarrow{y}$$

за неко $q\in(0,1)$. Изједначавањем $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{y}$ компоненте добијамо систем $\frac{2015m}{3015}=\frac{q}{2}$ и $\frac{2015(1-m)}{3031}=\frac{q}{2}$, одакле добијамо $q=\frac{4030}{6046}$, то јест

$$\overrightarrow{AK} = \frac{4030}{6046}\overrightarrow{AA_3}.$$

Слично, за $\overrightarrow{AL}$ имамо

$$\overrightarrow{AL} = n\overrightarrow{AC_2} + (1-n)\overrightarrow{AB_2} = \frac{2015n}{3014}\overrightarrow{x} + \frac{2015(1-n)}{3030}\overrightarrow{y}$$

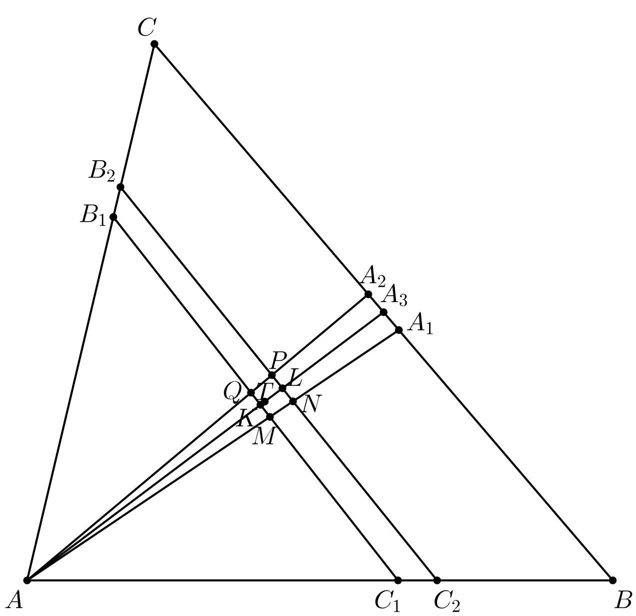
за неко $n\in(0,1)$, а такође и

$$\overrightarrow{AL} = p\overrightarrow{AA_3} = \frac{p}{2}\overrightarrow{x} + \frac{p}{2}\overrightarrow{y}$$

за неко $p\in(0,1)$, па добијемо систем $\frac{2015n}{3014}=\frac{p}{2}$ и $\frac{2015(1-n)}{3030}=\frac{p}{2}$, одакле следи $p=\frac{4030}{6044}$, то јест

$$\overrightarrow{AL} = \frac{4030}{6044}\overrightarrow{AA_3}.$$

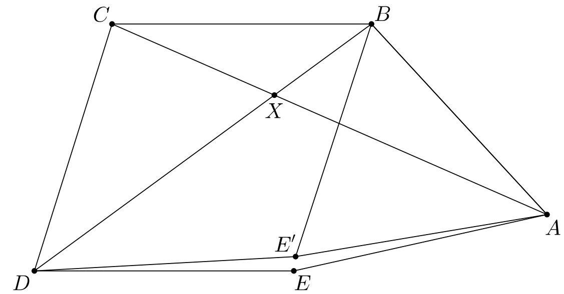
Најзад, из једнакости $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_3}$ и неједнакости $\frac{4030}{6046}<\frac{2}{3}=\frac{4030}{6045}<\frac{4030}{6044}$ следи да је T између K и L, па самим тим и унутар четвороугла $MNPQ$.



Оп 2015 1А 3

4. Претпоставимо прво $a_1>5$. То значи да у посматраном низу не можемо имати три узастопна члана која се разликују за по 2 (тј. k, $k+2$, $k+4$) и исто за 4 (тј. k, $k+4$, $k+8$), јер је један од та три броја дељив са 3, а како су сви чланови низа већи од 3, он не би могао бити прост. Зато, ако је следећи члан низа за 2 већи од претходног, онда члан након њега мора бити већи за 4 и обратно. Дакле, имамо два случаја: у првом случају посматрани низ почиње бројевима $a_1, a_1+2, a_1+6, a_1+8, a_1+12, a_1+14\dots$, а у другом случају почиње бројевима $a_1, a_1+4, a_1+6, a_1+10, a_1+12, a_1+16, a_1+18\dots$. У првом случају чланови $a_1, a_1+2, a_1+6, a_1+8, a_1+14$ дају међусобно различите остатке при дељењу са 5, а како су сви већи од 5, међу њима бар један није прост; у другом случају чланови $a_1, a_1+4, a_1+6, a_1+12, a_1+18$ дају међусобно различите остатке при дељењу са 5, па поново бар један међу њима није прост. Према томе, у првом случају низ може имати највише 5, а у другом највише 6 елемената.

Остаје још да испитамо случај $a_1 \leqslant 5$. Тада имамо $a_1 = 3$ или $a_1 = 5$. Уколико важи $a_1 = 5$, додавањем броја 3 на почетак низа постављени услови се не ремете а низ се продужава за један елемент; дакле, довољно је разматрати случај $a_1 = 3$. Тада важи $a_2 = 5$ или $a_2 = 7$. Уколико би важило $a_2 = 7$, додавањем броја 5 на друго место у низу добијамо дужи низ; дакле, довољно је разматрати случај $a_2 = 5$. Сада се испоставља да се наредни чланови низа могу једнозначно одредити на основу услова из поставке, те добијамо низ $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$, при чему следећи члан више не можемо одабрати према постављеном правилу. На основу изведених закључака примећујемо да је овај низ уједно и максималне могуће дужине, па тражена максимална дужина износи 8.



Оп 2015 1А 5

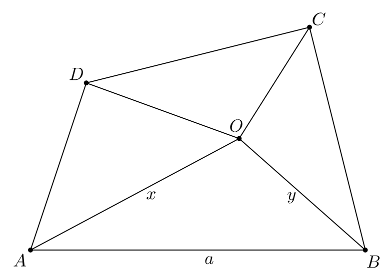
5. Нека се дијагонале AC и BD секу у тачки X под углом од 60°. Приметимо да не може важити $\measuredangle BXC = 60^\circ$. Заиста, тада бисмо имали $120^\circ = \measuredangle XBC + \measuredangle XCB = (90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle BCD) + (90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ABC)$, па следи $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 120^\circ$, што је у контрадикцији са $\measuredangle XBC + \measuredangle XCB = 120^\circ$. Према томе, $\measuredangle BXC = 120^\circ$. Сада имамо $(90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle BCD) + (90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ABC) = 60^\circ$, тј. $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 240^\circ$. Ако је E' тачка таква да је $\triangle ABE'$ једнакостраничан, онда имамо $BE' \parallel CD$ и $BE' \cong CD$, па је $BCDE'$ паралелограм и $AE' = DE' = BC$. Уколико важи $E' \equiv E$, одмах добијамо $DE \parallel BC$; уколико важи $E' \not\equiv E$, тада је $AE'DE$ паралелограм, па следи $AE \parallel DE' \parallel BC$, што опет завршава доказ.

Други разред – А категорија

1. Нека је уочена тачка O у унутрашњости четвороугла $ABCD$ као у поставци. Тада је бар један од $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$ или $\measuredangle DOA$ прав или туп. Без умањења општости, узмимо $\measuredangle AOB \geqslant 90^\circ$. Означимо дужине $OA = x$, $OB = y$, $AB = a$. Претпоставимо супротно: ниједна од дужи OA, OB, OC, OD није дужине мање од 15; специјално, $x \geqslant 15$ и $y \geqslant 15$. Сада имамо низ неједнакости

$$400 > a^2 \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 15^2 + 15^2 = 450,$$

чиме смо добили контрадикцију која завршава доказ.



Оп 2015 2А 1

2. А има победничку стратегију за све непарне n. У првом потезу он одабира средишње поље, а у сваком следећем потезу уписује X у поље централносиметрично пољу које је непосредно пре тога одабрао играч Б (на тај начин, уколико Б може да одигра потез према правилима игре, то ће моћи и играч А после њега). Слично, Б има победничку стратегију за све парне n, тако што на сваки потез играча А играч Б одговара одабиром поља централносиметричног пољу које је играч А управо одабрао (централну симетрију посматрамо у односу на средину табле).

3. Јасно је да важи $x > y$, па напишимо постављену једначину у облику $2^y(2^{x-y} - 1) = 2^{5z}3^{2z}7^z$. Пошто је $2^{x-y} - 1$ непаран број, мора важити $y = 5z$. Заменом $x - 5z = n \in \mathbb{N}$ добијамо једначину $2^n - 1 = 63^z$. Ако би z било парно, тада би следило $63^z + 1 \equiv 2 \pmod 4$, тј. $2^n = 2$, што повлачи $n = 1$ и онда $z = 0$, што није у скупу природних бројева. Према томе, z је непарно, па можемо раставити $2^n = 63^z + 1 = (63 + 1)(63^{z-1} - 63^{z-2} + ... + 1)$. Међутим, како је број $63^{z-1} - 63^{z-2} + ... + 1$ непаран а притом дели 2^n, ово је могуће само уколико је тај број једнак 1, а што је испуњено само за $z = 1$. Одатле добијамо $n = 6$, на основу чега налазимо једино решење постављене једначине: $(x, y, z) = (11, 5, 1)$.

4. По неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо

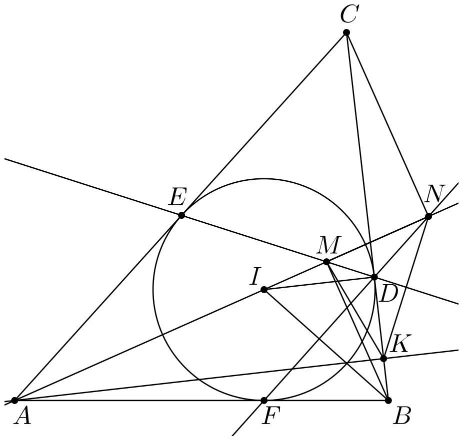
$$1 + a = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}},$$

$$a + b = a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}$$

и

$$8 + b = b + 4 + 4 \geqslant 3\sqrt[3]{16b}.$$

Множењем добијамо $(1 + a)(a + b)(b + 8) \geqslant 27ab$. Дакле, једнакост из поставке важи само када у све три примене неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи једнакост, а што даје једино решење $(a, b) = (2, 4)$.



Оп 2015 2А 5

5. Означимо са I центар кружнице уписане у $\triangle ABC$. Докажимо најпре да важи $\measuredangle AMB = 90^\circ$: заиста, $\measuredangle IMD = \measuredangle MAE + \measuredangle MEA = \frac{\alpha}{2} + (90^\circ + \frac{\gamma}{2}) = 180^\circ - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \measuredangle DBI$, па је четвороугао $IMDB$ тетиван и $\measuredangle IMB = \measuredangle IDB = 90^\circ$. Слично имамо $\measuredangle ANC = 90^\circ$. Четвороуглови $AMKB$ и $AKNC$ су сада тетивни, па следи $\measuredangle KMN = \measuredangle KBA = \beta = 2\measuredangle AME = 2\measuredangle DMN$; на исти начин имамо $\measuredangle KNM = 2\measuredangle DNM$, одакле следи тврђење.

Трећи разред – А категорија

1. Дату једначину можемо записати у облику

$$\frac{p_1+1}{p_1} \cdot \frac{p_2+1}{p_2} \cdots \frac{p_n+1}{p_n} = q.$$

Да би на левој страни био природан број, сваки од простих чинилаца $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из именилаца мора делити неки бројилац. Затим, да би након извршених свих таквих скраћивања на левој страни остао прост број (тј. q), сви бројиоци морају бити прости, осим једног, који мора бити производ тачно два проста броја. Дакле, сви бројиоци сем тог једног (нека је тај p_n+1) морају бити једнаки 3 (јер је 3 једини прост број који се може добити увећавањем неког простог броја за 1). Према томе, имамо $p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = 2$. Једначина се своди на $\frac{3^{n-1}(p_n+1)}{2^{n-1}p_n} = q$. Одатле добијамо $p_n = 3$ (ниједан други прост број на месту p_n не би се могао скратити ни са чим из бројиоца). Приметимо још да важи $n \geqslant 2$ (јер у супротном број на левој страни не би био природан). Након скраћивања остаје $\frac{3^{n-2}\cdot 2}{2^{n-2}} = q$. За $n \geqslant 4$ лева страна није природан број. У случају $n = 2$ лева страна износи 2, па тиме добијамо решење $(p_1, p_2, q) = (2, 3, 2)$, као и његову пермутацију $(p_1, p_2, q) = (3, 2, 2)$. У случају $n = 3$ лева страна износи 3, па тиме добијамо решење $(p_1, p_2, p_3, q) = (2, 2, 3, 2)$, као и његове пермутације $(p_1, p_2, p_3, q) = (2, 3, 2, 2)$ и $(p_1, p_2, p_3, q) = (3, 2, 2, 2)$. Укупно, дакле, посматрана једначина има пет решења.

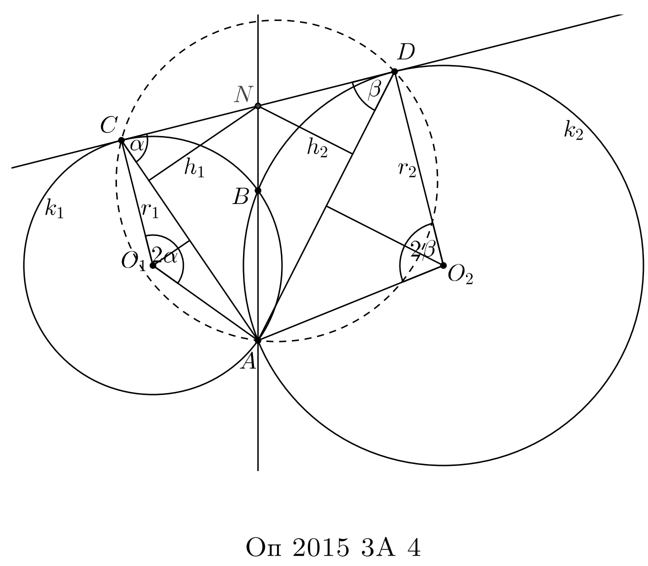
2. Приметимо да у неком низу природних бројева свака два суседна елемента имају парну разлику ако и само ако су сви елементи исте парности. Стога ћемо посебно пребројати низове чији су сви елементи парни а посебно низове чији су сви елементи непарни. Како у скупу $\{1, 2, \ldots, n\}$ парних бројева има $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, број неопадајућих низова дужине k чији су сви елементи парни износи $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k - 1}{k}$. Слично, низова са свим непарним члановима има $\binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + k - 1}{k}$, па тражени укупан број низова износи $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k - 1}{k} + \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + k - 1}{k}$.

3. За $x = n$ имамо $n^x - x^n = n^n - n^n = 0$, па $m \mid n^x - x^n$. Дакле, довољно је наћи бесконачно много вредности x таквих да важи $x^n \equiv n^n \pmod{m}$ и $n^x \equiv n^n \pmod{m}$. Прва конгруенција је испуњена кад год важи $x = n + km$ за произвољно $k \in \mathbb{Z}$. Друга конгруенција је испуњена кад год важи $x = n + l\varphi(m)$ за произвољно $l \in \mathbb{N}_0$: заиста, тада имамо $n^x = n^{n+l\varphi(m)} = n^n \cdot (n^{\varphi(m)})^l \equiv n^n \cdot 1^l = n^n \pmod{m}$. Дакле, за ма које $d \in \mathbb{N}_0$, број $n + dm\varphi(m)$ испуњава тражене услове, чиме је показано да их има бесконачно много.

4. Означимо кружницу из поставке с полупречником r_1 са k_1 ($C \in k_1$), и нека је њен центар тачка O_1; другу кружницу означимо са k_2 ($D \in k_2$) и нека је њен центар тачка O_2. Означимо још $\measuredangle AO_1C = 2\alpha$ и $\measuredangle AO_2D = 2\beta$. Тада важи $\measuredangle ACD = \alpha$ и $\measuredangle ADC = \beta$. Из синусне теореме примењене на $\triangle ACD$ добијамо $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\alpha} = 2r$, а из једнакокраких $\triangle AO_1C$ и $\triangle AO_2D$ имамо $AC = 2r_1 \sin\alpha$ и $AD = 2r_2 \sin\beta$. Из свега тога добијамо

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{AD}{2\sin\beta}}{\frac{AC}{2\sin\alpha}} = \frac{AD}{AC}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta},$$

тј. $\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Даље, нека су висине из N на AC и AD, редом, h_1 и h_2. Важи $h_1 = CN \sin\alpha$ и $h_2 = DN \sin\beta$. Посматрајући потенцију из тачке N добијамо једнакост $CN^2 = NB \cdot NA = DN^2$, тј. $CN = DN$. Сада лако израчунавамо $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$.



Оп 2015 3А 4

5. По неједнакости троугла имамо

$$3 = |z^{2015} + z^{2014} + |z|| \leqslant |z|^{2015} + |z|^{2014} + |z|.$$

Ако би важило $|z| < 1$, имали бисмо $|z|^{2015} < 1$ и $|z|^{2014} < 1$, тј. $|z|^{2015} + |z|^{2014} + |z| < 3$, што није могуће. Дакле, $|z| \geqslant 1$.

Применимо неједнакост троугла и на другу једнакост. Важи

$$3|z|^{2015} = |1 + z + |z|^{2014}| \leqslant 1 + |z| + |z|^{2014}.$$

Ако би важило $|z| > 1$, имали бисмо $|z|^{2015} > |z|$ и $|z|^{2015} > |z|^{2014}$, тј. $3|z|^{2015} > |z|^{2014} + |z| + 1$, што није могуће. Дакле, из претходног и овог закључка добијамо $|z| = 1$.

Приметимо да су за $|z| = 1$ лева и десна страна обе примењене неједнакости међусобно једнаке, тј. достиже се случај једнакости. Како је $|z|$ позитиван реалан број, у првој неједнакости троугла једнакост се може достићи само уколико су и z^{2015} и z^{2014} позитивни реални бројеви. Но, тада је и $\frac{z^{2015}}{z^{2014}}$ позитиван реалан број, тј. z је позитиван реалан број, па сада из $|z| = 1$ следи да је једино решење $z = 1$.

Четврти разред – А категорија

1. *Прво решење.* Важи

$$S = a^3 + ab^2 + b^2 + b - 2a^2b - a^2 = a^3 - a^2b - a^2 - a^2b + ab^2 + ab - ab + b^2 + b = (a^2 - ab - b)(a - b - 1).$$

Треба доказати $S \geqslant 0$. Из $a > b$ и $a, b \in \mathbb{N}$ следи $a - b - 1 \geqslant 0$ и $a^2 - ab - b = a(a - b) - b \geqslant a - b > 0$, чиме је задатак решен.

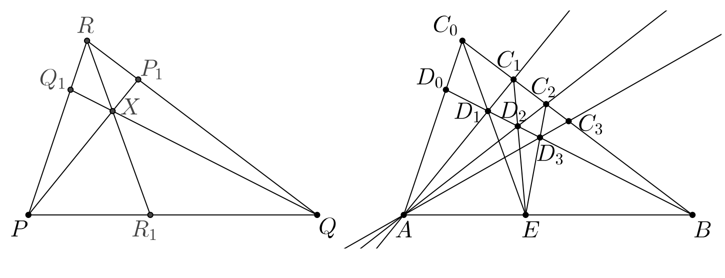
Друго решење. Запишимо $a = b + k$ $(k \in \mathbb{N})$. Уврштавањем овога у постављену неједнакост и сређивањем добијених израза установљавамо да преостаје још доказати неједнакост $k^3 + bk^2 + b - k^2 - 2bk \geqslant 0$. Она следи из неједнакости $k^3 - k^2 = k^2(k - 1) \geqslant 0$ и $bk^2 - 2bk + b = b(k - 1)^2 \geqslant 0$, чиме је задатак решен.

2. Докажимо најпре следећу лему.

Лема. Нека је дат $\triangle PQR$ и тачке R_1, P_1 и Q_1 на страницама PQ, QR и PR, редом, такве да се праве PP_1, QQ_1 и RR_1 секу у тачки X. Тада важи $\frac{PX}{XP_1} = \frac{PR_1}{R_1Q} + \frac{PQ_1}{Q_1R}$.

Доказ. Применом Менелајеве теореме на $\triangle PQP_1$ и праву RR_1 добијамо $\frac{P_1R}{RQ} = \frac{XP_1}{PX} \cdot \frac{PR_1}{R_1Q}$, а применом на $\triangle PRP_1$ и праву QQ_1 добијамо $\frac{P_1Q}{RQ} = \frac{XP_1}{PX} \cdot \frac{PQ_1}{Q_1R}$. Сабирањем ове две једнакости, коришћењем чињенице $P_1R + P_1Q = RQ$ и сређивањем доказујемо лему.

Сада узастопним примењивањем ове леме на $\triangle ABC_n$ за $n = 0, 1, 2\ldots$ индукцијом директно показујемо $\frac{AD_n}{D_nC_n} = x + ny$; одатле имамо $\frac{AD_{2015}}{D_{2015}C_{2015}} = x + 2015y$.



Оп 2015 4А 2

3. Означимо са S_n скуп низова дужине n чији су елементи из скупа $\{1, 2, 3\}$ и који немају две узастопне јединице. Ако два различита низа из S_n почињу двојком, јасно је да преосталих $n-1$ елемената тих низова чине два различита низа из S_{n-1}. Обратно, ако узмемо два различита низа из S_{n-1} и додамо им двојку на почетак, добијамо два различита низа из S_n који почињу двојком. Према томе, низова из S_n који почињу двојком има $|S_{n-1}|$. На сличан начин добијамо и да низова из S_n који почињу тројком има $|S_{n-1}|$.

Ако низ из S_n почиње јединицом, други елемент низа мора бити двојка или тројка. Сличним закључивањем као у претходним случајевима констатујемо да низова из S_n који почињу јединицом има $2|S_{n-2}|$. Према томе, добијамо $|S_n| = 2(|S_{n-1}| + |S_{n-2}|)$. Сада почев од $|S_1| = 3$ и $|S_2| = 8$ директно израчунавамо $|S_8| = 3344$.

4. Ако важи $f \equiv 0$, тврђење је тривијално. Претпоставимо сада $f \not\equiv 0$, тј. $f(a) \neq 0$ за неко a. Приметимо да из $f(x_1) = f(x_2)$ следи $x_1f(a) = f(af(x_1)) = f(af(x_2)) = x_2f(a)$, тј. $x_1 = x_2$; дакле, функција f је инјективна. Даље имамо $f(f(x)) = f(1 \cdot f(x)) = xf(1)$; одавде за $x = 1$ добијамо $f(f(1)) = f(1)$, па због инјективности следи $f(1) = 1$ и онда $f(f(x)) = x$. Сада имамо $f(xy) = f(yf(f(x))) = f(x)f(y)$, па одатле $f(-1)^2 = f((-1)^2) = 1$, али због $f(-1) \neq f(1) = 1$ мора бити $f(-1) = -1$. Најзад, $f(-x) = f(-1)f(x) = -f(x)$, чиме је задатак решен.

5. Дефинишимо низ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ рекурзивно на следећи начин: $a_1 = 2$ и, за $n \geqslant 2$,

$$a_n = \begin{cases} (n+1)a_{n-1}, & \text{ако је } n+1 \text{ прост број;} \\ na_{n-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тврдимо да за све $n \in \mathbb{N}$ важи $\varphi(a_n) = n!$. Доказ спроводимо индукцијом. За $n = 1$ и $n = 2$ тврђење очигледно важи ($\varphi(a_1) = \varphi(2) = 1 = 1!$ и $\varphi(a_2) = \varphi(6) = 2 = 2!$). Претпоставимо да тврђење важи за све бројеве мање од датог n, $n \geqslant 3$. Ако је n прост број, тада имамо $a_n = na_{n-1} = n^2a_{n-2}$, при чему прост број n не дели a_{n-2} (заиста, из дефиниције посматраног низа очито је да се прост фактор n први пут појављује тек у a_{n-1}); одатле, преко $\varphi(n^2) = n(n-1)$ (јер је n прост број) и $\varphi(a_{n-2}) = (n-2)!$ (по индуктивној хипотези), имамо $\varphi(a_n) = \varphi(n^2)\varphi(a_{n-2}) = n!$. Нека је сада n сложен број. Уколико је $n+1$ прост број, још лакше него малопре добијамо $\varphi(a_n) = \varphi((n+1)a_{n-1}) = \varphi(n+1)\varphi(a_{n-1}) = n \cdot (n-1)! = n!$.

Преостао је случај када је и $n+1$ сложен број. Нека је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ проста факторизација броја n. Приметимо да сваки од ових фактора p_i дели a_{n-1} (ово следи из $p_i \mid a_{p_i-1}$ и $a_u \mid a_v$ за све $u \leqslant v$). Према томе, можемо записати $a_n = na_{n-1} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_l^{\gamma_l}$, где за све i, $1 \leqslant i \leqslant k$, важи $\beta_i \geqslant \alpha_i + 1$, а са $q_1, q_2, \ldots, q_l$ означени су прости фактори који деле a_{n-1} али не деле n. Најзад израчунавамо:

$$\begin{aligned}
\varphi(a_n) &= \varphi(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_l^{\gamma_l}) \\
&= p_1^{\beta_1-1}(p_1-1) p_2^{\beta_2-1}(p_2-1) \cdots p_k^{\beta_k-1}(p_k-1) q_1^{\gamma_1-1}(q_1-1) q_2^{\gamma_2-1}(q_2-1) \cdots q_l^{\gamma_l-1}(q_l-1) \\
&= np_1^{\beta_1-\alpha_1-1}(p_1-1) p_2^{\beta_2-\alpha_2-1}(p_2-1) \cdots p_k^{\beta_k-\alpha_k-1}(p_k-1) q_1^{\gamma_1-1}(q_1-1) q_2^{\gamma_2-1}(q_2-1) \cdots q_l^{\gamma_l-1}(q_l-1) \\
&= n\varphi(p_1^{\beta_1-\alpha_1} p_2^{\beta_2-\alpha_2} \cdots p_k^{\beta_k-\alpha_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_l^{\gamma_l}) = n\varphi(a_{n-1}) = n \cdot (n-1)! = n!,
\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен.

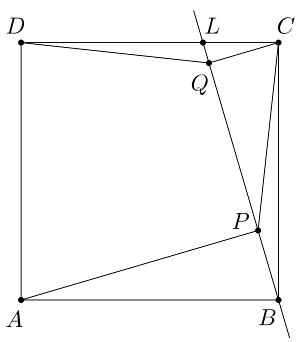
Први разред – Б категорија

1. Нека је U неки скуп такав да су A, B и C његови подскупови (на пример, $U = A \cup B \cup C$). Са $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ означаваћемо комплемент скупова A, B и C у односу на скуп U (тј. $\overline{A} = U \setminus A$ и слично за B и C). Сада имамо:

$$\begin{aligned}
(A \setminus (B \setminus C)) \setminus (B \setminus (C \setminus A)) &= (A \setminus (B \cap \overline{C})) \setminus (B \setminus (C \cap \overline{A})) = (A \cap \overline{(B \cap \overline{C})}) \setminus (B \cap \overline{(C \cap \overline{A})}) = (A \cap \overline{(B \cap \overline{C})}) \cap \overline{(B \cap \overline{(C \cap \overline{A})})} \\
&= (A \cap (\overline{B} \cup C)) \cap (\overline{B} \cup (C \cap \overline{A})) = (A \cap (\overline{B} \cup C) \cap \overline{B}) \cup (A \cap (\overline{B} \cup C) \cap C \cap \overline{A}) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (\varnothing \cap (\overline{B} \cup C) \cap C) = (A \cap \overline{B}) \cup \varnothing = A \cap \overline{B} = A \setminus B.
\end{aligned}$$

Дакле, пошто важи $B \cap C \subseteq B$, добијамо $A \setminus (B \cap C) \supseteq A \setminus B$, тј.

$$A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus (B \setminus C)) \setminus (B \setminus (C \setminus A)).$$



Оп 2015 1Б 2

2. За $\triangle ABP$ и $\triangle BCQ$ важи $AB \cong BC$, $\measuredangle APB = \measuredangle BQC = 90^\circ$ и $\measuredangle BAP = 90^\circ - \measuredangle ABP = \measuredangle CBQ$, па добијамо $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$; одатле следи $BP \cong CQ$. Сада за $\triangle BCP$ и $\triangle CDQ$ важи $BC \cong CD$, $BP \cong CQ$ и $\measuredangle CBP = 90^\circ - \measuredangle BCQ = \measuredangle DCQ$, па добијамо $\triangle BCP \cong \triangle CDQ$. Из овога следи $CP \cong DQ$, што је и требало доказати.

3. Приметимо да важи

$$\overline{ababab} = \overline{ab0000} + \overline{ab00} + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 10101.$$

Из $10101 = 91 \cdot 111$ следи да је број $\overline{ababab}$ дељив са 111. С друге стране, 107 је прост број који не дели ни 10101, ни $\overline{ab}$ (због $\overline{ab} < 107$), па 107 не дели ни $\overline{ababab}$.

4. За све $(x, y) \in A \times A$ важи $(x, y)\ \rho\ (x, y)$, јер имамо $(x^2 - x^2)(y - y) = 0$ и $3 \mid 0$. Дакле, релација ρ јесте рефлексивна. Даље, за све $(x, y), (z, t) \in A \times A$ важи

$$(x^2 - z^2)(y - t) = (-(z^2 - x^2))(-(t - y)) = (z^2 - x^2)(t - y),$$

одакле лако видимо да важи $(x, y)\ \rho\ (z, t)$ ако и само ако важи $(z, t)\ \rho\ (x, y)$, па добијамо да релација ρ јесте симетрична. Најзад, релација ρ није транзитивна: на пример, важи $(1, 2)\ \rho\ (3, 2)$ (јер $3 \mid (1^2 - 3^2)(2 - 2) = 0$) и $(3, 2)\ \rho\ (3, 3)$ (јер $3 \mid (3^2 - 3^2)(2 - 3) = 0$), али $(1, 2)$ није у релацији ρ са $(3, 3)$ (јер $3 \nmid (1^2 - 3^2)(2^2 - 3^2) = 40$). Како ова релација није транзитивна, она није релација еквиваленције.

5. Разликујемо 2 случаја. Ако су прва и последња куглица у низу плаве, од преосталих 2016 позиција у низу треба одабрати 3 на којима ћемо распоредити беле куглице (док на осталим позицијама распоређујемо плаве), што је могуће на $\binom{2016}{3} = \frac{2016!}{3! \cdot 2013!} = \frac{2016 \cdot 2015 \cdot 2014}{3!} = 336 \cdot 2015 \cdot 2014$ начина. У другом случају, ако су прва и последња куглица у низу беле, на преосталих 2016 места имамо тачно још једну белу куглицу, а њу је могуће распоредити на 2016 начина. Дакле, решење задатка је

$$336 \cdot 2015 \cdot 2014 + 2016.$$

Други разред – Б категорија

1. Ако важи $p^2+q^3=x^2$, тј. $q^3=x^2-p^2=(x-p)(x+p)$, онда због $x-p<x+p$ следи $(x-p,x+p)=(1,q^3)$ или $(x-p,x+p)=(q,q^2)$. У првом случају добијамо $2p=q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$, а једина два начина да се лева страна прикаже као производ два чиниоца су $1\cdot 2p$ и $2\cdot p$, што води до $q-1\in\{1,2\}$, тј. $q\in\{2,3\}$; за $q=2$ имамо $2p=2^3-1=7$, што је немогуће, а за $q=3$ имамо $2p=3^3-1=26$, одакле добијамо решење $(p,q)=(13,3)$. У другом случају добијамо $2p=q^2-q=(q-1)q$, те опет следи $q=2$ или $q=3$, и поново отпада могућност $q=2$, док за $q=3$ добијамо $2p=3^2-3$, па добијамо решење $(p,q)=(3,3)$. Дакле, имамо два решења: $(p,q)\in\{(13,3),(3,3)\}$.

2. Из Вијетових формула за почетну једначину важи $x_1+x_2=-1$ и $x_1x_2=\frac{2015}{12}$. Саставићемо квадратну једначину $y^2+py+q=0$ чија решења задовољавају $y_1=\frac{2x_1+1}{x_1-2}$ и $y_2=\frac{2x_2+1}{x_2-2}$. Из Вијетових формула за ову једначину имаћемо $-p=y_1+y_2=\frac{2x_1+1}{x_1-2}+\frac{2x_2+1}{x_2-2}=\frac{4x_1x_2-3(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{4\cdot\frac{2015}{12}-3\cdot(-1)-4}{\frac{2015}{12}-2\cdot(-1)+4}=\frac{8048}{2087}$, тј. $p=-\frac{8048}{2087}$, и $q=y_1y_2=\frac{2x_1+1}{x_1-2}\cdot\frac{2x_2+1}{x_2-2}=\frac{4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{4\cdot\frac{2015}{12}+2\cdot(-1)+1}{\frac{2015}{12}-2\cdot(-1)+4}=\frac{8048}{2087}$. Дакле, тражена квадратна једначина (једна од више могућих) гласи:

$$y^2-\frac{8048}{2087}y+\frac{8048}{2087}=0.$$

3. Пера ће из корпе на којој пише *Рајко* извући само једну воћку. Та корпа је или Ђорђева (у њој су тада 2 крушке и 3 јабуке) или Перина (у њој су тада 3 брескве). Ако је Пера извукао крушку или јабуку, јасно је да је та корпа Ђорђева; тада корпа на којој пише *Пера* припада Рајку, а корпа на којој пише *Ђорђе* припада Пери. Ако је Пера извукао бреску, та корпа је његова, па је корпа на којој пише *Пера* у ствари Ђорђева, а корпа на којој пише *Ђорђе* припада Рајку.

4. Из једнакости дате у поставци добијамо:

$$0=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-a^2c-ac^2=a(a^2-b^2-c^2)+b(b^2-a^2+c^2)+c(c^2+b^2-a^2)=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2).$$

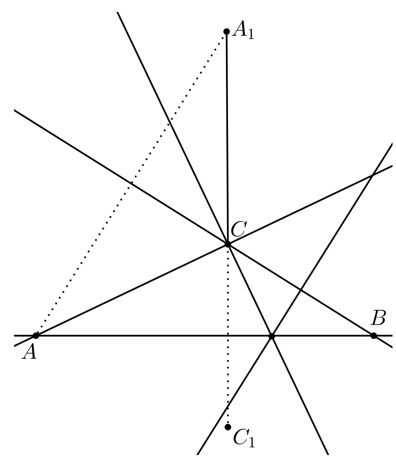
Како су a, b и c странице троугла, важи $a-b-c<0$. Одатле, да би горња једнакост била испуњена, мора важити $a^2-b^2-c^2=0$, тј. $a^2=b^2+c^2$, а ово управо значи да је $\triangle ABC$ правоугли са хипотенузом a.

5. Обележимо углове у $\triangle ABC$ са α, β и γ. Размотримо прво случај када се тачке A_1 и C налазе са исте стране праве AB. У том случају важи $\alpha+\beta<90^\circ$, тј. γ је туп угао.

Тачке C, A_1 и C_1 су колинеарне ако и само је права A_1C нормална на праву AB, тј. ако и само ако важи $\measuredangle ACA_1-\measuredangle CAB=90^\circ$, што се своди на $90^\circ=(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)-\alpha=\alpha+2\beta$.

Права AB, симетрала дужи BC и нормала на праву AC у тачки C секу у једној тачки ако и само ако је троугао који образују права AB, права BC и нормала на праву AC у тачки C једнакокраки с основицом BC. Ово важи ако и само ако важи $\gamma-90^\circ=\beta$, тј. $180^\circ=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta+\beta+90^\circ$, што се своди на $90^\circ=\alpha+2\beta$. Како је исти овај потребан и довољан услов добијен и у претходном пасусу, тиме је задатак решен у случају када се тачке A_1 и C налазе са исте стране праве AB.

Случај када се тачке A_1 и C налазе са разних страна праве AB решава се на сличан начин.



Оп 2015 2Б 5

Трећи разред – Б категорија

1. *Прво решење.* Нека је тачка (x_0,y_0) заједничка за посматране графике, где важи $x_0,y_0>0$. Тада имамо $y_0=ax_0+b$, $y_0=bx_0+c$ и $y_0=cx_0+a$. У случају да важи $a=b$, из $ax_0+b=y_0=bx_0+c$ добијамо $b=c$, тј. $a=b=c$, што је и требало доказати. Претпоставимо сада $a\neq b$. Размотримо најпре случај $a<b$. Тада из $ax_0<bx_0$ и $ax_0+b=y_0=bx_0+c$ добијамо $b>c$, а потом из $bx_0>cx_0$ и $bx_0+c=y_0=cx_0+a$ добијамо $c<a$, тј. све заједно $c<a<b$, но сада из $y_0=cx_0+a<ax_0+b=y_0$ имамо контрадикцију. Најзад, ако је испуњено $a>b$, тада поново имамо контрадикцију на потпуно аналоган начин, чиме је задатак решен.

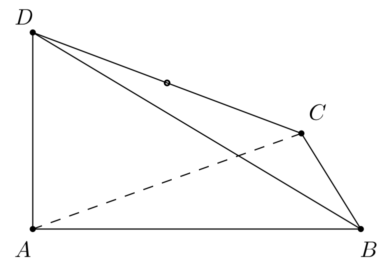
Друго решење. Из једнакости $ax_0+b=bx_0+c$, $bx_0+c=cx_0+a$ и $cx_0+a=ax_0+b$ добијамо $(a-b)x_0=c-b$, $(c-b)x_0=c-a$ и $(c-a)x_0=b-a$, а одавде даље следи $b-a=(c-a)x_0=(c-b)x_0^2=(a-b)x_0^3$, што се може записати и као $(a-b)(x_0^3+1)=0$. Како важи $x_0^3+1>0$, добијамо $a-b=0$, тј. $a=b$. Аналогно се доказује и $b=c$.

(За заинтересоване ученике, напоменимо да се задатак може решити и без услова да тачка (x_0,y_0) припада првом квадранту. Наиме, горње решење функционише у свим случајевима осим у случају $x_0^3+1=0$, тј. $x_0=-1$, али тада се посматране једнакости своде на $y_0=-a+b$, $y_0=-b+c$ и $y_0=-c+a$, а одавде опет лако следи $a=b=c$.)

2. Запишимо $2016 = abc$, где је a једноцифрен, b двоцифрен а c троцифрен број. Претпоставимо $a \geqslant 2$. Тада имамо $bc \leqslant 1008$, но како је најмањи двоцифрен делилац броја 2016 број 12, следи $bc \geqslant 12 \cdot 100 = 1200$, контрадикција. Дакле $a = 1$. Пронађимо првих неколико двоцифрених делилаца броја 2016: $12, 14, 16, 18, 21\dots$ (они се могу добити из просте факторизације броја 2016: $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$). За $b = 12$ имамо $c = 168$; за $b = 14$ имамо $c = 144$, за $b = 16$ имамо 126; за $b = 18$ имамо $c = 112$. Тиме смо нашли засад 4 тражена представљања. За $b \geqslant 21$ имамо $c \leqslant \frac{2016}{21} = 96$, тј. c није више троцифрен број. Дакле, тражени број начина износи 4.

3. Користећи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, наша неједначина постаје $-\sin^2 x + 6\sin x - 5 > 0$. Увођењем смене $t = \sin x$ и решавањем по t добијамо решење $t \in (1, 5)$. Но, како имамо ограничење $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, јасно да ни за које x не добијамо $\sin x$ у траженом интервалу, па почетна неједначина нема решења.

4. Довољно је доказати да су $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ правоугли са хипотенузом CD (заиста, тада сфера с центром у средишту дужи CD и пречником CD пролази кроз тачке A и B, што је и требало доказати). Како је ивица AD нормална на раван ABC, добијамо $AD \perp AC$, одакле је $\triangle ACD$ заиста правоугли. Даље, поново из ортогоналности дужи AD на раван ABC добијамо и да су равни ABD и ABC међусобно нормалне, што уз ортогоналност равни BCD и ABD (дату у поставци) води до закључка да је ивица BC нормална на раван ABD (ово следи јер се равни ABC и BCD секу по правој BC). Но, одавде имамо $BC \perp BD$, па је и $\triangle BCD$ правоугли, чиме је доказ завршен.



Оп 2015 3Б 4

5. Раставимо $n^9 - n^3 = n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$. Кубови целих бројева при дељењу са 7 могу давати следеће остатке: $0^3 = 0$, $(\pm 1)^3 = \pm 1$, $(\pm 2)^3 = \pm 8 \equiv \pm 1 \pmod 7$ или $(\pm 3)^3 = \pm 27 \equiv \mp 1 \pmod 7$, тј. 0, 1 или -1, одакле следи да је број $n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$ увек дељив са 7. Слично утврђујемо да кубови целих бројева при дељењу са 9 могу давати само остатке 0, 1 или -1, одакле следи да је број $n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$ увек дељив са 9. Дакле, да би тај број био дељив са 2016, довољно је испитати када је дељив са $\frac{2016}{7 \cdot 9}$, тј. са 32.

Ако је n паран број, тада су $n^3 - 1$ и $n^3 + 1$ непарни, па је посматрани број дељив са 32 ако и само ако $32 \mid n^3$, а што је испуњено ако и само ако $4 \mid n$. Ако је n непаран број, тада су $n^3 - 1$ и $n^3 + 1$ парни, од чега је један дељив са 2 али не и са 4, па други онда мора бити дељив са 16 (да бисмо имали жељену дељивост са 32), а растављањем $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ и $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$ и уочавањем да су $n^2 + n + 1$ и $n^2 - n + 1$ непарни бројеви, долазимо до услова $16 \mid n - 1$ или $16 \mid n + 1$. Све заједно, посматрани број је дељив са 32 ако и само ако при дељењу са 16 даје неки од остатака 0, 4, 8, 12, 1 или -1. Одатле, на сваких 16 узастопних природних бројева имамо тачно 6 за које важи $32 \mid n^9 - n^3$ (а тиме и $2016 \mid n^9 - n^3$), па бројева тражених у поставци има $\frac{2016}{16} \cdot 6 = 756$.

Четврти разред – Б категорија

1. Квадрати целих бројева при дељењу са 8 могу давати следеће остатке: $0^2 = 0$, $(\pm 1)^2 = 1$, $(\pm 2)^2 = 4$, $(\pm 3)^2 = 9 \equiv 1 \pmod 8$ или $4^2 = 16 \equiv 0 \pmod 8$, тј. 0, 1 или 4. Ако би тражени бројеви постојали, из $a^2 - 2015b^2 - 8c \equiv a^2 + b^2 \pmod 8$ и $14 \equiv 6 \pmod 8$ добили бисмо $a^2 + b^2 \equiv 6 \pmod 8$, али ово није могуће постићи уколико a^2 и b^2 узимају вредности 0, 1 или 4 (по модулу 8). Дакле, тражени бројеви не постоје.

2. Обојимо првих 2015 столица произвољно. У тачно једном од два могућа бојења преостале столице број плавих столица биће паран. Зато је тражени број 2^{2015}.

3. Приметимо прво:

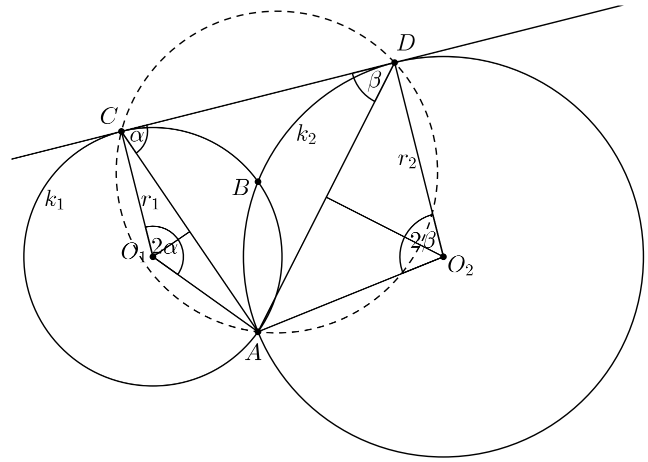
$$\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{k}{\sin 2x} = \frac{x}{\frac{\cos x}{\sin x}} - \frac{k}{\sin 2x} = \frac{x \sin x}{\cos x} - \frac{k}{\sin 2x} = \frac{2x\sin^2 x}{2\sin\cos x} - \frac{k}{\sin 2x} = \frac{2x\sin^2 x - k}{\sin 2x}.$$

Када $x \to \frac{\pi}{2}$, именилац овог разломка тежи 0, а за $k \neq \pi$ бројилац не тежи 0, па израз тада не може имати коначну граничну вредност. Остаје да проверимо случај $k = \pi$. Испуњени су услови за примену Лопиталовог правила, па тада имамо:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin^2 x - \pi}{\sin 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x + 4x \sin x \cos x}{2\cos 2x} = \frac{2 + 0}{-2} = -1.$$

Дакле $k = \pi$ је једина вредност параметра k за коју је ова гранична вредност коначна.

4. Очито је лева страна $\geqslant 1$, а десна $\leqslant 1$, па да би важила једнакост, мора бити $\sin ax = 0$ и $\cos x = 1$. Одатле следи $ax = m\pi$ и $x = 2k\pi$ за неке $m, k \in \mathbb{Z}$. Једно решење је увек $x = 0$. Да не би постојало ниједно друго, не сме важити једнакост $m = 2ak$ ни за које целе бројеве m и k, $k \neq 0$. Ако би параметар a био рационалан, број $2ak$ ће бити цео за неко k, па тада посматрана једначина има више решења. Ако је број a ирационалан, тада је и број $2ak$ ирационалан за сваки цео број $k \neq 0$, па не може бити цео, што смо и желели да постигнемо. Дакле, посматрана једначина има јединствено решење ако и само ако је a ирационалан број.



Оп 2015 4Б 5

5. Нека је r тражени полупречник. Означимо кружницу из поставке с полупречником r_1 са k_1 ($C \in k_1$), и нека је њен центар тачка O_1; другу кружницу означимо са k_2 ($D \in k_2$) и нека је њен центар тачка O_2. Означимо још $\measuredangle AO_1C = 2\alpha$ и $\measuredangle AO_2D = 2\beta$. Тада важи $\measuredangle ACD = \alpha$ и $\measuredangle ADC = \beta$. Из синусне теореме примењене на $\triangle ACD$ добијамо $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\alpha} = 2r$, а из једнакокраких $\triangle AO_1C$ и $\triangle AO_2D$ имамо $AC = 2r_1 \sin\alpha$ и $AD = 2r_2 \sin\beta$. Из свега тога добијамо

$$r^2 = \frac{AC}{2\sin\beta} \cdot \frac{AD}{2\sin\alpha} = \frac{2r_1 \sin\alpha \cdot 2r_2 \sin\beta}{4\sin\beta \sin\alpha} = r_1 r_2,$$

тј. $r = \sqrt{r_1 r_2}$.