Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Први разред – А категорија

1. Нека су A, B и C коначни скупови за које важи

$$|A\triangle C|+|B\triangle C|=|A\triangle B|.$$

Доказати да тада важи

$$A\cap B\subseteq C\subseteq A\cup B.$$

(За скупове X и Y означили смо $X\triangle Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$, што се назива *симетрична разлика* скупова X и Y.)

2. У врсту је поређано 2016 столица. На колико начина је могуће обојити сваку столицу црвеном или плавом бојом на такав начин да број парова суседних столица које имају исту боју буде паран?

3. Дат је $\triangle ABC$. На страници AB су одабране тачке C_1 и C_2 такве да важи

$$AC_1=\frac{2015}{3015}AB \text{ и } AC_2=\frac{2015}{3014}AB,$$

на страници BC тачке A_1 и A_2 такве да важи

$$BA_1=\frac{1007}{2015}BC \text{ и } BA_2=\frac{1008}{2015}BC,$$

а на страници AC тачке B_1 и B_2 такве да важи

$$AB_1=\frac{2015}{3031}AC \text{ и } AB_2=\frac{2015}{3030}AC.$$

Права AA_1 сече праве B_1C_1 и B_2C_2 редом у тачкама M и N, а права AA_2 сече B_1C_1 и B_2C_2 редом у тачкама Q и P. Доказати да се тежиште $\triangle ABC$ налази унутар четвороугла $MNPQ$.

4. Одредити највећу могућу дужину растућег низа $a_1,a_2,a_3\dots$ простих бројева, уз услов да разлика свака два узастопна члана тог низа износи 2 или 4.

5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао чије су све странице једнаке дужине. Ако се две дијагонале тог петоугла секу под углом од 60°, доказати да су две његове странице паралелне.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Други разред – А категорија

1. У уоченом четвороуглу све странице су дужине мање од 20. Доказати да за било коју тачку унутар тог четвороугла постоји неко његово теме које је од дате тачке на удаљености мањој од 15.

2. Два играча, А и Б, играју следећу игру. Дата је табла $3 \times n$ која је на почетку игре празна. Играчи наизменично одабирају по једно празно поље и означавају одабрано поље словом X, уз услов да свако поље на рубу табле, означено или неозначено, може бити сусед највише једном означеном пољу (суседна поља су она поља која имају заједничку страницу). Победник је онај играч после чијег потеза наредни играч више не може одиграти потез. Играч А игра први. За које n играч А има победничку стратегију, а за које n има играч Б?

3. Одредити све тројке природних бројева (x, y, z) за које важи

$$2^x - 2^y = 2016^z.$$

4. Наћи све парове позитивних реалних бројева a и b за које важи

$$(1 + a)(8 + b)(a + b) = 27ab.$$

5. Кружница уписана у $\triangle ABC$ у ком важи $AB < AC$ додирује странице BC, CA и AB у тачкама D, E и F, редом. Симетрала $\measuredangle BAC$ сече праве DE и DF у тачкама M и N, редом. Нека је K подножје висине из темена A. Доказати да је D центар уписане кружнице у $\triangle MNK$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Трећи разред – А категорија

1. Решити једначину

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_n}\right)=q,$$

где су непознате природан број n и прости бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и q.

2. За дате природне бројеве n и k, колико има неопадајућих низова дужине k чији су елементи из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ и чија свака два суседна елемента имају парну разлику?

3. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева x таквих да је број $n^x - x^n$ дељив са m.

4. Две кружнице полупречника r_1 и r_2 секу се у тачкама A и B, а једна њихова заједничка тангента их додирује у тачкама C и D. Нека је N тачка пресека правих AB и CD, при чему је B између A и N. Израчунати однос висина $\triangle NAC$ и $\triangle NAD$ спуштених из тачке N.

5. Одредити све комплексне бројеве z који задовољавају следеће две једнакости:

$$z^{2015} + z^{2014} + |z| = 3;$$
$$3z^{2015} - |z|^{2014} - z = 1.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су a и b природни бројеви, при чему важи $a > b$. Доказати неједнакост

$$a^3 + ab^2 + b^2 + b \geqslant 2a^2b + a^2.$$

2. Дат је $\triangle ABC_0$ и тачке D_0 и E на дужима AC_0 и AB, редом. За задате тачке C_n и D_n (где $n \in \mathbb{N}_0$) тачке C_{n+1} и D_{n+1} дефинишемо на следећи начин: D_{n+1} је пресек правих C_nE и BD_0, а C_{n+1} је пресек правих AD_{n+1} и BC_0. Означимо $x = \dfrac{AD_0}{D_0C_0}$ и $y = \dfrac{AE}{EB}$. Наћи $\dfrac{AD_{2015}}{D_{2015}C_{2015}}$ у функцији од x и y.

3. Колико има низова дужине 8 чији су елементи из скупа $\{1, 2, 3\}$ и који немају две узастопне јединице?

4. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

Доказати да је функција f непарна.

5. Доказати да се за сваки природан број n може одабрати природан број m такав да важи $\varphi(m) = n!$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Први разред – Б категорија

1. Нека су дати скупови A, B и C. Која од инклузија $\subseteq$, $\supseteq$ мора важити за скупове

$$A \setminus (B \cap C) \text{ и } (A \setminus (B \setminus C)) \setminus (B \setminus (C \setminus A))?$$

2. На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка L. Из темена A и C спуштене су нормале на праву BL и секу је, редом, у тачкама P и Q. Доказати: $CP \cong DQ$.

3. Доказати да је шестоцифрени број $\overline{ababab}$ (где су a и b цифре) дељив са 111, али да није дељив са 107.

4. Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. На скупу $A \times A$ дефинисана је следећа релација:

$$(x, y)\ \rho\ (z, t) \text{ ако и само ако } 3 \mid (x^2 - z^2)(y - t).$$

Испитати да ли је релација ρ рефлексивна, симетрична и транзитивна, и да ли је то релација еквиваленције.

5. Дато је 2015 једнаких плавих и 3 једнаке беле куглице. На колико начина их можемо поређати у низ од 2018 куглица уз услов да прва и последња куглица у низу буду исте боје?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све парове простих бројева p, q таквих да $p^2 + q^3$ буде потпун квадрат.

2. Дата је једначина $12x^2 + 12x + 2015 = 0$. Саставити квадратну једначину чија су решења
$$\frac{2x_1 + 1}{x_1 - 2} \text{ и } \frac{2x_2 + 1}{x_2 - 2},$$
где су x_1 и x_2 решења полазне једначине.

3. Мајка је за излет својој деци спремила три врсте воћа: крушке, јабуке и брескве. Сваком детету је на непрозирној корпици коју је добио залепила и налепницу с његовим именом. Потом је деци саопштила да је Ђорђу спремила 2 крушке и 3 јабуке, Рајку 3 јабуке и 1 брескву, а Пери 3 брескве. Док се Пера купао у реци, Ђорђе и Рајко су заменили налепнице на корпама, при чему ниједна налепница није остала на свом месту. Колико најмање воћа и из којих корпи треба да извуче Пера не завирујући у корпе, како би могао да налепнице врати на своја места? (Пери је позната информација да након Ђорђеве и Рајкове зврчке ниједна налепница није остала на свом месту.)

4. Дат је $\triangle ABC$ за чије странице a, b и c важи
$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a + b) - bc(b + c) + ac(a + c).$$
Доказати да је $\triangle ABC$ правоугли.

5. Нека су A, B и C три произвољне тачке. Нека су A_1 и C_1 тачке осносиметричне тачкама A и C у односу на праве BC и AB, редом. Доказати да су тачке C, A_1 и C_1 колинеарне ако и само ако се права AB, симетрала дужи BC и нормала на праву AC у тачки C секу у једној тачки.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су реални бројеви a, b и c такви да графици функција $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx+a$ имају бар једну заједничку тачку у првом квадранту. Доказати: $a = b = c$.

2. На колико се начина број 2016 може представити као производ једног једноцифреног, једног двоцифреног и једног троцифреног броја, при чему није битан поредак?

3. Решити неједначину

$$6\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{11}{2} > 0.$$

4. У тетраедру $ABCD$ ивица AD је нормална на раван ABC, а такође су и равни BCD и ABD међусобно нормалне. Доказати да је средиште ивице CD центар описане сфере око тетраедра $ABCD$.

5. Одредити колико има природних бројева n за које важи

$$n \leqslant 2016 \text{ и } 2016 \mid n^9 - n^3.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Четврти разред – Б категорија

1. Испитати да ли постоје цели бројеви a, b и c такви да важи

$$a^2 - 2015b^2 - 8c = 14.$$

2. У врсту је поређано 2016 столица. На колико начина је могуће обојити сваку столицу црвеном или плавом бојом на такав начин да број плавих столица буде паран?

3. Одредити све вредности параметра k за које постоји коначна гранична вредност:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{k}{\sin 2x} \right).$$

4. За које вредности параметра a једначина

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

има јединствено решење?

5. Две кружнице полупречника r_1 и r_2 секу се у тачкама A и B, а једна њихова заједничка тангента их додирује у тачкама C и D, при чему је тачка B ближа правој CD од тачке A. Израчунати полупречник кружнице описане око $\triangle ACD$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.