Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Први разред – А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је $7 \cdot 2^n + 1$ потпун квадрат.

2. Дат је четвороугао $ABCD$ за који важи $AD \cong BC$ и $\measuredangle A + \measuredangle B = 120^\circ$. Доказати да у њему средишта дијагонала и средиште странице CD одређују једнакостраничан троугао.

3. Укруг је поређано 200 реалних бројева. Збир свих тих бројева износи 200. Збир свака три узастопна броја није већи од 3. Да ли је могуће да ови услови буду испуњени ако је један од датих бројева једнак 3?

4. Да ли је могуће таблицу формата $n \times n$ попунити нулама и јединицама, а да притом за свако i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, апсолутна вредност разлике броја јединица у i-тој врсти и i-тој колони буде једнака 1, за:

a) $n = 2015$;

b) $n = 2016$?

5. Нека је T тежиште оштроуглог $\triangle ABC$. Нека је A' подножје висине из тачке A на BC, а A'' тачка дужи BC за коју важи $BA' = A''C$. Означимо са M и N пресечне тачке полуправих AA'' и TA', респективно, с кружницом описаном око $\triangle ABC$. Доказати: $MN \parallel BC$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Други разред – А категорија

1. a) Доказати:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

за све позитивне реалне бројеве a и b за које важи $b < a^2$.

b) Да ли је вредност израза

$$\frac{5 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

рационалан или ирационалан број?

2. Наћи све природне бројеве n за које је $n! - 44$ потпун квадрат.

3. Наћи све парове природних бројева a и b такве да свака од квадратних једначина

$$x^2 + ax + a + b = 0$$

и

$$x^2 + bx + a + b = 0$$

има целобројна решења.

4. У $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = \alpha < 90^\circ$. На страницама AC и AB одабране су тачке D и E, редом, такве да важи $\measuredangle ABD = \measuredangle ACE = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Доказати да права DE додирује кружницу уписану у $\triangle ABC$ ако и само ако је $\triangle ABC$ правоугли.

5. У разреду има 16 ученика. Једног дана сваки ученик је дао своју свеску неком другом ученику (исти ученик може да прими више од једне свеске). Доказати да се може издвојити група од 6 ученика таквих да ниједан ученик из те групе није дао свеску другом ученику из групе.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Трећи разред – А категорија

1. У скупу природних бројева решити једначину

$$11x^2 + 2016 = 11x^2y + y^2.$$

2. Одредити број парова природних бројева (a, b) таквих да важи $a \leqslant 2016$, $b \leqslant 2016$ и $a \not\equiv b \pmod{d}$ за сваки прави делилац d броја 2016 (прави делиоци су сви делиоци осим 1 и 2016).

3. Посејдон, грчки водени бог, окупио је 2016 чамџија и предложио им следећу игру. На почетку игре Посејдон ће изабрати двојицу и поставити их на две локације на бесконачно дугачкој, праволинијској реци. Чамџије потом треба да пронађу један другог (тј. да се сусретну на реци). Максимална брзина њихових чамаца износи $1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, и могу се кретати било узводно, било низводно. Сваки чамџија у сваком тренутку зна тачан положај свог чамца на реци, као и време протекло од почетка игре. Међутим, ниједан од изабраних чамџија не зна идентитет другог изабраног чамџије. Чамџије (свих 2016) имају могућност да заједнички осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква комуникација међу чамџијама није дозвољена. Доказати да чамџије могу осмислити стратегију која ће им гарантовати успех без обзира на то која двојица су изабрана и без обзира на њихове почетне положаје на реци.

4. Нека је дат $\triangle ABC$. Нека је тачка D средиште странице BC. Кружница γ_1 пролази кроз D и додирује праву AB у тачки B, а кружница γ_2 пролази кроз D и додирује праву AC у тачки C. Кружнице γ_1 и γ_2 се секу у тачки M, $M \not\equiv D$. Доказати да тачка симетрична тачки M у односу на праву BC лежи на правој AD.

5. Функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ је задата условима:

- $f(1) = 1$,
- $f(2n) = 2f(n)$ и
- $f(4n+1) = f(4n+3) = f(2n) + f(2n+1)$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказати да за све n важи $f(n) \geqslant \frac{n}{3}$. Када се достиже једнакост?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је полином $(x+1)^n - x^n - 1$ дељив полиномом

a) $x^2 + x + 1$;

b) $(x^2 + x + 1)^2$.

2. Одредити све тројке (p, q, r) различитих простих бројева за које је

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{p+q} + \frac{101}{p+q+r}$$

природан број.

3. Дат је јединични квадрат $ABCD$. Нека $d(U, VW)$ означава растојање тачке U од праве VW. Одредити за коју се тачку X из равни квадрата $ABCD$ достиже минимална вредност израза $AX + BX + d(X, CD)$, и израчунати ту вредност.

4. Нека је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ дефинисана на следећи начин: ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ канонична факторизација броја n, тада важи

$$f(n) = |\{i \leqslant k : \alpha_i = 1\}|.$$

(На пример: $f(2016) = f(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1) = 1$; $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 0$.) Да ли је за сваки природан број N могуће наћи N узастопних природних бројева таквих да за сваки број n у том низу важи $f(n) = 2016$?

5. Дато је 10 новчића поређаних у врсту. Међу њима су два лажна, и за њих је познато да су суседни. У једном питању дозвољено је одабрати скуп новчића A и питати колико има лажних међу њима. Могуће је поставити два питања, при чему ће одговори уследити тек након што оба питања буду постављена.

a) Да ли је на овај начин могуће одредити лажне новчиће?

b) Да ли је на овај начин могуће одредити лажне новчиће, уз додатно ограничење да се скуп A мора састојати од неколико узастопних новчића?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Први разред – Б категорија

1. На једном великом математичком такмичењу учествује 2016 ученика. Неки од њих су из исте школе, неки нису. Доказати да је могуће изабрати 32 ученика који су сви из различитих школа, или је могуће изабрати 66 ученика који су сви из исте школе.

2. Одредити све природне бројеве n за које је израз $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$ дељив са 10.

3. Наћи све тројке (x, y, z) природних бројева за које важи

$$xy^2z^3 = 384;$$
$$x^2y^3z = 1152.$$

4. Нека је a фиксиран реалан број. Решити једначину

$$|2x + a| - ax = 2$$

(решење изразити у зависности од параметра a).

5. Дат је $\triangle ABC$ са страницама $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Тачке D и E су дате на страницама AB и AC, редом, при чему је права DE тангента на уписану кружницу у $\triangle ABC$ и важи $DE \parallel BC$. Одредити дужину дужи DE (одговор изразити у функцији од страница a, b и c).

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Други разред – Б категорија

1. Да ли је број $2015\sqrt[3]{3}+2016\sqrt{2}$ рационалан или ирационалан?

2. Одредити параметар k такав да решења једначине

$$(k-1)x^2-2kx+4=0$$

можемо обележити са x_1 и x_2 на такав начин да важи $x_1^2-3x_2^2=4$.

3. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да бар један од бројева

$$\frac{a}{b}+\frac{2014}{2015} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a}+\frac{2016}{2015}$$

није природан број.

4. Нека је дат правоугаоник $ABCD$ и тачка M у његовој равни. Ако важи $AM=40$, $BM=21$ и $CM=5$, одредити дужину дужи DM.

5. Карте означене бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 постављене су на сто у овом поретку. Влада први прилази столу и мења места неким двема картама, а потом столу прилази Воја те и он мења места неким двема картама. Колико различитих распореда карата је на овај начин могуће добити?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Трећи разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sin 3x + 2\cos 2x + 3\sin x + 4 = 0.$$

2. Да ли је вредност израза

$$\sqrt[3]{6+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{6-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

природан број?

3. Дата је бесконачна табла чија су поља јединични квадратићи. Свако поље обојено је црном или белом бојом, при чему сваки правоугаоник формата 2×3 (или 3×2) садржи тачно два црна поља.

a) Колико све црних поља може имати правоугаоник 1×3?

b) Колико све црних поља може имати квадрат 2016×2016?

4. Дешифровати сабирање

$$\begin{array}{rr} & ОКРУЖНО \\ + & ДОБРО \\ + & ДОБРО \\ + & БРАВО \\ + & БРАВО \\ \hline & ДРЖАВНО \end{array}$$

ако је познато да истим словима одговарају исте а различитим словима различите цифре, и притом је $Р$ непарна цифра а $В$ је парна цифра.

5. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 5$ такве да за правилан n-тоугао $A_1A_2\dots A_n$ важи

$$\left(\frac{A_1A_3}{A_1A_2}\right)^2 = 2\cdot\frac{A_1A_5}{A_1A_3} + 3\cdot\left(\frac{A_1A_2}{A_1A_4}\right)^2.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Четврти разред – Б категорија

1. Израчунати запремину праве четворостране пирамиде $ABCDE$ ако је њена основа правоугаоник чије дужине страница износе $AB = 32$ и $AD = 18$, а површине бочних страна налазе се у размери $P(\triangle ABE) : P(\triangle ADE) = 4 : 3$.

2. Нека углови α, β и γ неког троугла задовољавају систем:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{3-\sqrt{3}}{8};$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = \frac{3}{2}.$$

Одредити углове тог троугла.

3. Теткица пише по табли следећи број: 23012301..., тј. прво напише цифру 2, па цифру 3, па цифру 0, па цифру 1 и тако укруг. Може се зауставити у било ком тренутку. Да ли она на овај начин може на табли написати број дељив са 2016?

4. Попунити празна поља у таблици тако да бројеви у свакој врсти и свакој колони чине аритметичку прогресију. Колико различитих решења постоји?

				21
	16			
		27		
1				

5. Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима степена n чије су све нуле реалне и веће од 1. Доказати да $P(x)$ има нулу која није мања од $1 + n\left|\dfrac{P(1)}{P'(1)}\right|$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.