

Регата (с решениями)

Младшая лига

Первый тур

1а. Вычислите $ab + cd$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$.

□ Ответ: 0.

Заметим, что $ab + cd = ab + cd + ac + bd = (a + d)(b + c)$ и $ab + cd = ab + cd - ac - bd = (a - d)(b - c)$. Если одна из скобок $(a + d)$, $(b + c)$, $(a - d)$, $(b - c)$ равна нулю, то искомое значение равно нулю. Иначе среди этих скобок четное число отрицательных. Но $0 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = (a - d)(a + d) + (b - c)(b + c)$. Тогда $(a - d)(a + d) = -(b - c)(b + c)$. Отсюда следует, что четного числа отрицательных скобок среди этих четырех быть не может.

Другое решение. Умножив правую и левую часть равенства $ac + bd = 0$ на $ad + bc$, получим

$$(ac + bd)(ad + bc) = a^2cd + d^2ab + c^2ab + b^2cd = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) = 0,$$

а поскольку в условии задачи содержатся равенства $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$, то $ab + cd = 0$.

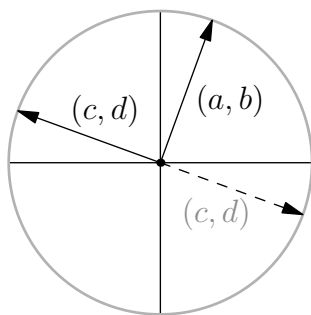


Рис. 1: к задаче 1а

Ещё одно решение. Условие $ac + bd = 0$ означает, что векторы (a, b) и (c, d) перпендикулярны. Условия $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$ означают, что это векторы длины 1 (рис. 1). Легко видеть, что либо $a = d$, $b = -c$, либо $a = -d$, $b = c$. В обоих случаях искомое равенство выполняется.

1г. Дан параллелограмм $ABCD$. На прямых AB и BC отметили точки E и F таким образом, что $AF = AB$ и $CE = CB$, причем точки E и F не совпадают с B . Докажите, что $DE = DF$.

□ Рис. 2. Треугольник DCE равен треугольнику ABC по двум сторонам и углу между ними. Значит, отрезок DE равен диагонали AC . Аналогично для треугольника FAD и отрезка DF .

- 1с. Сколькими способами можно выбрать 3 различных натуральных числа от 1 до 100 так, чтобы их произведение делилось на 4?

□ Ответ: $\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} - \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{6} - \frac{50 \cdot 49 \cdot 25}{2} = 111475$.

Всего вариантов выбрать три числа $100 \cdot 99 \cdot 98/6$. Вариантов выбрать три нечетных числа $50 \cdot 49 \cdot 48/6$. Вариантов выбрать две нечетных числа и одно четное, не делящееся на 4, $50 \cdot 49 \cdot 25/2$.

Второй тур

- 2а. Пусть x — натуральное число, y — цифра. Известно, что

$$x(x+2) = \overline{\dots 7y}.$$

Какие значения может принимать y ?

□ Ответ: 5.

Пусть $R = \overline{\dots 7y}$. Тогда $R+1 = x(x+2) + 1 = (x+1)^2$. Тогда число $R+1$ должно быть точным квадратом, то есть оканчиваться на 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Последние две цифры $R+1$ в этих случаях будут соответственно 80, 71, 74, 75, 76 и 79.

На 80 квадрат не может заканчиваться. 71, 74, 75 и 79 не подходят, так как в этих случаях R дает остаток 2 или 3 при делении на 4, а точные квадраты дают остатки 0 или 1.

Для $\overline{\dots 76}$ пример — 24^2 . Итого ответ $y = 5$ (например, для $x = 23$).

- 2г. Вершины выпуклого многоугольника расположены в узлах целочисленной решетки, причем ни одна из его сторон не проходит по линиям решетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий решетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме горизонтальных отрезков.

□ Для вертикальных отрезков считаем площадь как сумму площадей трапеций и треугольников с высотой 1 (рис. 3). Получаем $S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot 1$. То же самое верно и для горизонтальных отрезков.

- 2с. На шахматной доске 8×8 произвольно проведена прямая. Какое наибольшее число клеток она может пересечь? (Пересечение считается только по внутренним точкам клеток.)

□ Ответ: 15.

Оценка. Отметим все точки пересечения проведенной прямой с линиями сетки шахматной доски. Отмеченные точки разбивают проведенную прямую на несколько отрезков (и два луча). Каждый отрезок проходит ровно по одной клетке шахматной доски. Следовательно, сосчитав отрезки, мы узнаем, сколько точек пересекает прямая.

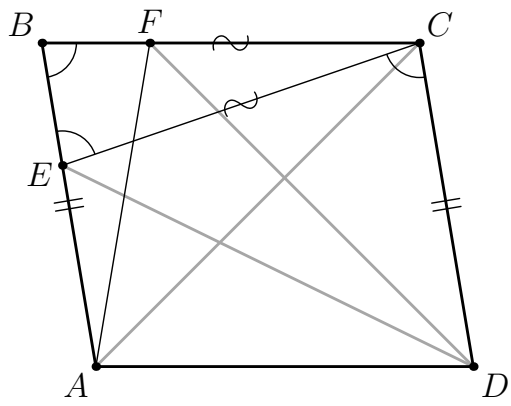


Рис. 2: к задаче 1g

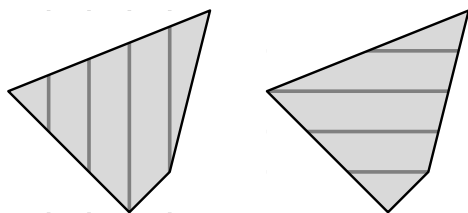


Рис. 3: к задаче 2g

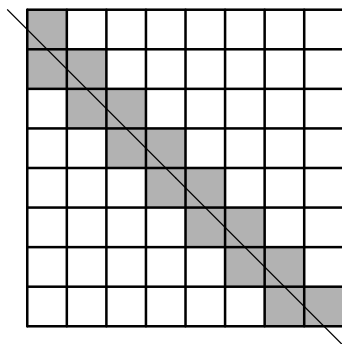


Рис. 4: к задаче 2с

Шахматная доска разделена на клетки 18 отрезками: 9 вертикалей и 9 горизонталей. С каждой из них проведенная прямая может пересекаться не более чем в одной точке, но из четырех границ, лишь с двумя. Следовательно, максимальное число точек пересечения — 16. Эти точки разбивают прямую не более чем на 15 отрезков.

Пример на рис. 4.

Третий тур

3а. Вычислите сумму

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \dots + \frac{100}{98!+99!+100!}.$$

□ Заметим следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!} &= \frac{n}{(n-2)!(1+(n-1)+n(n-1))} = \frac{1}{n(n-2)!} = \\ &= \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \dots + \frac{100}{98!+99!+100!} &= \\ = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99!} - \frac{1}{100!}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{100!}. \end{aligned}$$

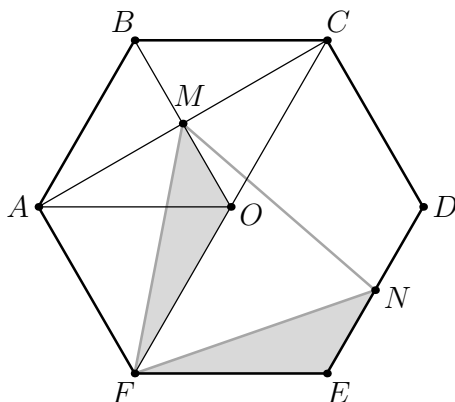


Рис. 5: к задаче 3г

3г. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точка M — середина диагонали AC , N — середина стороны DE . Докажите, что треугольник FMN правильный.

□ Рис. 5. Пусть O — центр шестиугольника. Легко видеть, что $ABCO$ — параллелограмм, и M — его центр. Угол FOM равен 120° , и равен углу FEN . Отрезок FO равен стороне шестиугольника, и равен FE . Отрезок OM равен половине стороны шестиугольника, и равен EN . Тогда треугольники FOM и FEN равны, и равны отрезки FM и FN . С другой стороны, из равенства углов OFM и EFN следует, что угол NFM равен 60° .

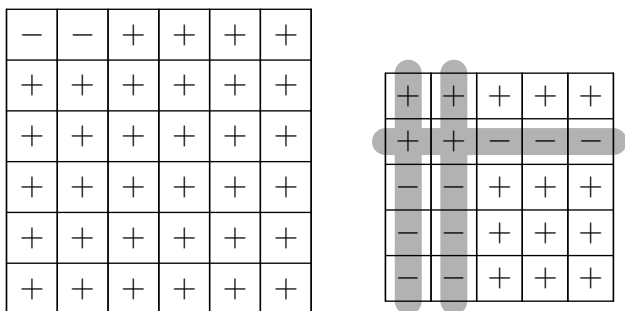


Рис. 6: к задаче 3с

3с. В таблице $n \times n$ в первых двух клетках верхнего ряда стоят минусы, а во всех остальных клетках плюсы (рис. 6). За одну операцию разрешается менять знак во всех клетках одного столбца или одной строки на противоположный. После применения нескольких операций оказалось, что в таблице стоит ровно 9 минусов. Какое наименьшее значение может принимать n ?

□ Ответ: 5.

Оценка. $n = 3$ не подходит, поскольку есть квадрат 2×2 , в котором всего 1 минус, а в каждом таком квадрате четность числа минусов не меняется. $n = 4$ не подходит, поскольку четность числа минусов во всей таблице не меняется.

Пример для $n = 5$ на рис. 6.

Четвертый тур

4а. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6.$$

□ Заметим, что $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca$. Тогда исходное неравенство переписывается как $9 - ab - bc - ca \geq 6$. Достаточно доказать $ab + bc + ca \leq 3$. Это следует из

$$9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 3ab + 3ac + 3bc.$$

Это, в свою очередь, следует из известного неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, которое получается из $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geq 0$ раскрытием скобочек.

- 4g. P и Q — середины сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$ соответственно. Диагонали прямоугольника $PQDC$ пересекаются в точке R . Оказалось, что AP является биссектрисой угла BAR . Найдите длину стороны BC , если $AB = 1$.

□ Ответ: $2/\sqrt{3}$.

Рис. 7. Пусть прямая AR пересекает прямую BC в точке X . Тогда $BP = PC = CX$. Поэтому по свойству биссектрисы $AX : AB = PX : PB = 2 : 1$, откуда $AX = 2$. По теореме Пифагора получаем $BX = \sqrt{3}$, далее $BC = 2/3 \cdot BX = 2/\sqrt{3}$.

- 4с. Ежик в тумане может ходить по дугам окружностей целочисленного радиуса с центрами в точках с целочисленными координатами. Менять одну дугу на другую он может тоже только в целых точках. Может ли ежик за несколько таких переходов попасть из точки с координатами $(0, 0)$ в точку с координатами $(0, 1)$?

□ Ответ: нет, не может.

Рассмотрим очередной ход. Пусть вектор от исходной точки до центра окружности равен (m_1, n_1) , а вектор от центра окружности до конечной точки равен (m_2, n_2) (рис. 8). Так как $r^2 = m_1^2 + n_1^2 = m_2^2 + n_2^2$, то среди чисел m_1, n_1, m_2, n_2 всего четное число нечетных. Далее, так как сумма координат ежика изменилась на $m_1 + n_1 + m_2 + n_2$, то она сохранила свою четность.

Изначально сумма координат была четной, а в конце должна стать нечетной.

Старшая лига

Первый тур

- 1а. Найдите все натуральные n такие, что для некоторого простого числа p верно

$$p \leq \frac{n^2}{5} < p + 1.$$

□ Ответ: 4, 5, 6.

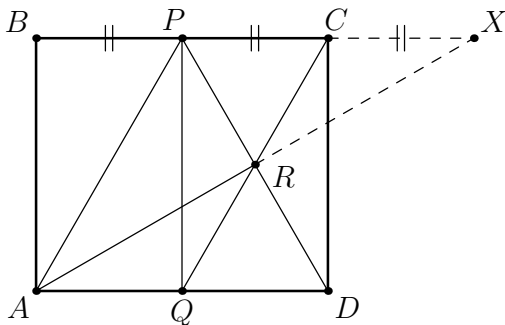


Рис. 7: к задаче 4g

Пусть $n = 5k + r$, где r — остаток при делении на 5. Тогда $p = [n^2/5] = 5k^2 + 2kr + [r^2/5]$.

Рассмотрим случаи.

$r = 0$. Тогда $p = 5k^2$, это число составное при $k > 1$.

$r = 1$. Тогда $p = 5k^2 + 2k = k \cdot (5k + 2)$ составное для $k > 1$.

$r = 2$. $p = 5k^2 + 4k = k \cdot (5k + 4)$ составное для $k > 1$.

$r = 3$. $p = 5k^2 + 6k + 1 = (k + 1) \cdot (5k + 1)$ составное для $k > 0$.

$r = 4$. $p = 5k^2 + 8k + 3 = (k + 3) \cdot (5k + 1)$ составное для $k > 0$.

Осталось проверить $n = 5, 1, 6, 2, 7, 3, 4$.

- 1g. Дан треугольник ABC с прямым углом C . Найдите на гипотенузе AB все точки X такие, что $CX^2 = AX \cdot BX$.

□ Ответ: середина гипотенузы и основание высоты из точки C .

Из свойств медианы и высоты к гипотенузе прямоугольного треугольника следует, что обе указанные точки подходят. Докажем, что других нет.

Рис. 9. Пусть H — основание высоты CH треугольника, M — основание медианы CM . Тогда $CX^2 = CH^2 + HX^2$, а $AX \cdot BX = (AH + HX) \cdot (BH - HX)$, если длину HX считать положительной, когда X на отрезке HB , и отрицательной иначе. Тогда $CH^2 + HX^2 = (AH + HX) \cdot (BH - HX)$ — это квадратное уравнение на HX . Раскрыв скобки и сократив CH^2 с $AH \cdot BH$, получаем $2HX^2 = HX \cdot (BH - AH)$. Корень $HX = 0$ соответствует основанию высоты, а $HX = (BH - AH)/2$, как несложно видеть, — середине стороны.

Другое решение. Рис. 10. Продлим CX до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке Y , получим $CX \cdot YX = AX \cdot BX = CX^2$, откуда $YX = CX$. Это означает, что Y находится на том же расстоянии от прямой AB , что и точка C . Получаем не более двух решений, и одно в случае равнобедренного прямоугольного треугольника.

- 1с. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых нет нуля, а любые две цифры различны и не имеют общих делителей, кроме единицы?

□ Ответ: $6 \cdot 5! = 720$.

Найдем количество наборов различных попарно взаимно простых цифр. Из цифр 2, 4, 6, 8 может участвовать ровно одна. Из цифр 3, 6, 9 также ровно одна. Кроме этого, могут участвовать цифры 1, 5 и 7. Значит, из каждой из первых двух групп должно быть ровно по одному числу. Отсюда ясно, что 6 участвовать не может. Значит, можно выбрать

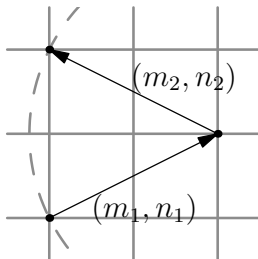


Рис. 8: к задаче 4с

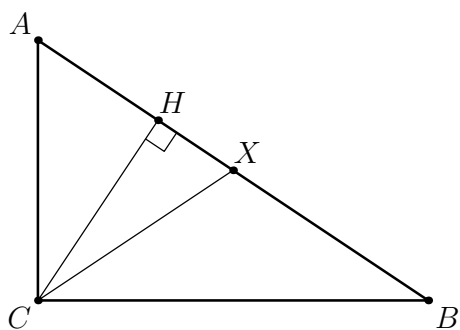


Рис. 9: к задаче 1g

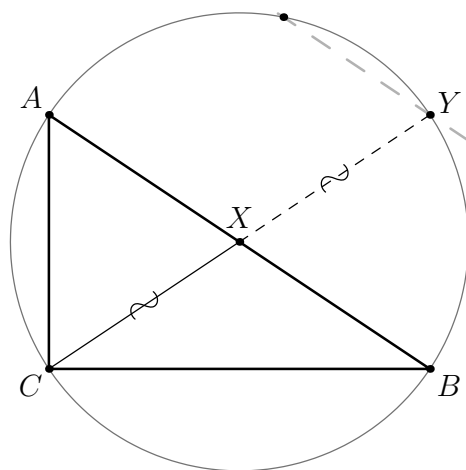


Рис. 10: к задаче 1g

любую из степеней двойки (три варианта), любую степень тройки (два варианта), а также 1, 5 и 7. Всего 6 вариантов.

Пять цифр образуют пятизначное число $5!$ способами.

Второй тур

- 2а. Докажите, что если какая-нибудь пара действительных чисел x и y удовлетворяет уравнениям

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0,$$

то эта же пара чисел удовлетворяет уравнению

$$xy - 12x + 15y = 0.$$

□ Разложим первое равенство на множители:

$$(x - y)(x - 2y + 1) = 0.$$

Тогда либо $x = y$, либо $x = 2y - 1$.

(1) Подставим $x = y$ во второе равенство, получаем $2y = 0$. Тогда $x = y = 0$, что действительно удовлетворяет искомому равенству.

(2) Подставим $x = 2y - 1$ во второе равенство, получаем $y^2 - 5y + 6 = 0$. Отсюда либо $y = 2$, $x = 3$, либо $y = 3$, $x = 5$. Подстановкой убеждаемся, что обе пары подходят.

Другое решение. Рассмотрим следующее тождество:

$$\begin{aligned} (x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y) \cdot (x - y - 9) + (x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y) \cdot (-x + 2y + 3) = \\ = 2(xy - 12x + 15y). \end{aligned}$$

В справедливости его нетрудно убедиться, раскрыв скобки. Если какая-нибудь пара значений x и y удовлетворяет двум исходным уравнениям, то левая часть тождества также обращается в нуль. Следовательно, правая часть тождества также обращается в нуль, а это значит, что x и y удовлетворяют третьему уравнению.

- 2г. В треугольнике ABC точка O — центр вневписанной окружности, которая касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Докажите, что точки A, B, C и центр описанной окружности треугольника ABO лежат на одной окружности.

□ Рис. 11. Пусть L — центр описанной окружности треугольника AOB . Так как центральный угол в два раза больше вписанного, получаем

$$\begin{aligned} \angle ALB = 2\angle AOB = 2(180^\circ - \angle ABO) - 2\angle BAO = \\ = (180^\circ - \angle ABC) - \angle BAC = \angle ACB. \end{aligned}$$

- 2с. В 10-серийном сериале нет персонажа, который встречается во всех сериях. Известно, что в любых 6 сериях есть общий персонаж. Какое наименьшее количество персонажей может быть в таком сериале?

□ Ответ: 7.

Оценка. Шесть или меньше персонажей быть не может. Действительно, в этом случае можно для каждого персонажа рассмотреть серию, в которой его нет. Получится не более 6 серий. Дополнив их до 6 серий произвольным образом, мы получим шесть серий без общего персонажа.

Пример для семи персонажей: первый участвует во всех сериях, кроме первой, второй персонаж — во всех, кроме второй, и т. д. В последних трех сериях участвуют все.

Третий тур

За. Про действительные числа x, y, z известно, что

$$x + y + z = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение $|(x - y)(y - z)(x - z)|$?

□ Ответ: $6\sqrt{3}$.

Выражая $z = -(x + y)$ из первого равенства и поставляя во второе, получаем $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 6$, т.е. $x^2 + xy + y^2 = 3$. Аналогично $y^2 + yz + z^2 = 3$ и $x^2 + xz + z^2 = 3$. Кроме того, $(x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 2xy + 2xz + 2yz$, откуда $xy + xz + yz = -3$.

Преобразуем

$$\begin{aligned}(x-y)^2(y-z)^2(x-z)^2 &= (3-3xy)(3-3yz)(3-3xz) = \\ &= 27(1-xy-yz-xz+x^2yz+xy^2z+xyz^2-x^2y^2z^2) = \\ &= 27(4-(xyz)^2) \leq 108.\end{aligned}$$

Равенство достигается при $xyz = 0$, например, при $x = 0, y = \sqrt{3}, z = -\sqrt{3}$.

Другое решение. Как и в предыдущем, выведем $xy + xz + yz = -3$. Пусть $w = xyz$. Тогда по т. Виета числа x, y, z являются корнями уравнения $t^3 - 3t = w$.

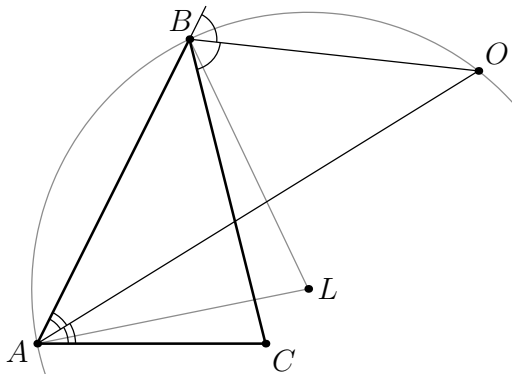


Рис. 11: к задаче 2g

Так как выражение $R = (x - y)^2(y - z)^2(x - z)^2$ является симметрическим, то оно выражается как многочлен $R(w)$, причем не более чем второй степени. При замене x, y, z на $-x, -y, -z$ значение w меняется на противоположное, а R не меняется, то есть R является четным многочленом от w . Наконец, R равно нулю, когда w совпадает со значениями локального максимума и локального минимума функции $t^3 - 3t$, и R положительно на отрезке между этими значениями.

Получаем, что R — четный квадратный трехчлен с ветвями вниз, и его максимум достигается при $w = 0$, то есть при $x = 0, y = \sqrt{3}, z = -\sqrt{3}$.

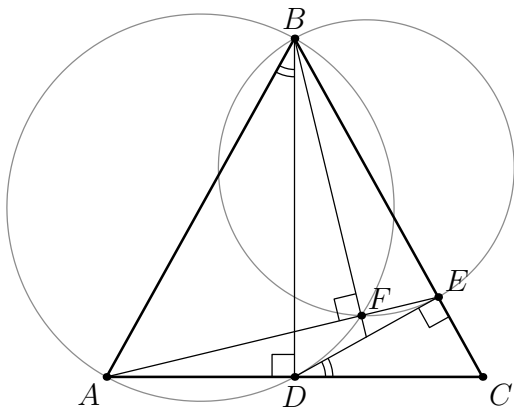


Рис. 12: к задаче 3г

- 3г.** В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка D — середина основания AC , E — основание перпендикуляра из точки D на сторону BC , F — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника ADB и отрезка AE . Докажите, что прямая BF проходит через середину отрезка DE .

□ Пусть X — пересечение прямых BF и DE .

Рис. 12. Прямая BE является радикальной осью окружностей, описанных вокруг ADB и BFE , а DE — их общая касательная.

Другое решение. Рис. 13. Опустим перпендикуляр AL на BC . Легко видеть, что AE — медиана треугольника ALC . Треугольники ALC и BED подобны, так как их стороны соответственно перпендикулярны. Отрезки AE и BX тоже перпендикулярны, а значит, являются соответствующими элементами в этих треугольниках. Значит, BX — медиана в треугольнике BED .

- 3с.** На плоскости расположено 2016 правильных треугольников (не обязательно равных). На какое наибольшее число частей они могут разбивать плоскость?

□ Ответ: $2 + 3 \cdot 2016 \cdot 2015$.

Будем добавлять треугольники по одному. Изначально часть одна, для одного треугольника их две. Каждый следующий треугольник добавляет частей не больше, чем участков, на которые разбита его граница. Два треугольника пересекаются не более чем в шести точках, так как отрезок перекает границу выпуклой фигуры не более чем в двух

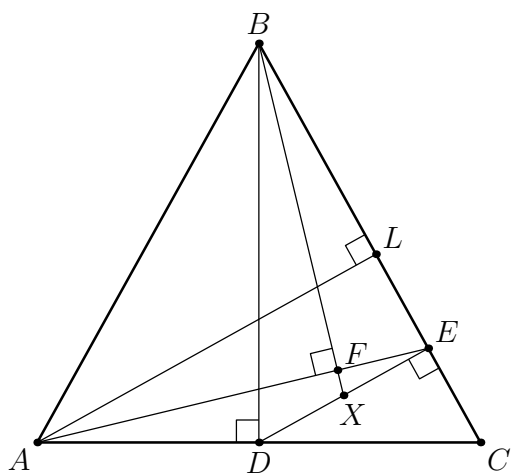


Рис. 13: к задаче 3g

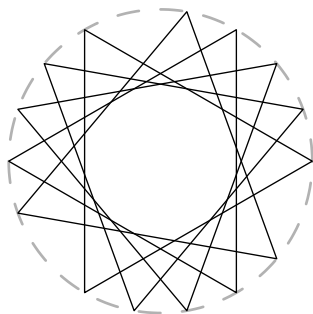


Рис. 14: к задаче 3с

точках. Значит, участков границы не более $6 \cdot k$, где k — количество ранее добавленных треугольников.

$$1 + 1 + \sum_{k=1}^{2015} 6 \cdot k = 2 + 6 \cdot 2015 \cdot 2016/2.$$

Пример на рис. 14. Каждой части, кроме внутренней и внешней, можно сопоставить некоторое пересечение двух треугольников (например, самое «правое», если смотреть из центра). Отсюда легко получается формула для количества частей.

Четвертый тур

- 4а. Дана произвольная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, отличная от константы. Докажите, что найдутся такие $x, y \in \mathbb{R}$, что $f(x + y) < f(xy)$.

□ Предположим, что утверждение неверно, то есть для любых действительных x и y выполнено $f(x + y) \geq f(xy)$. Сначала подставим $y = 0$. Получаем $f(x) \geq f(0)$ для всех x , то есть в точке 0 у функции f глобальный минимум.

Далее, подставим $y = -x$. Получаем $f(0) \geq f(-x^2)$ для всех x , то есть во всех отрицательных точках у f также минимум.

Наконец, для произвольно положительного t подставим $x = y = -\sqrt{t}$. Получаем $f(-2\sqrt{t}) \geq f(t)$. Значит, минимум распространяется и на все положительные аргументы f , то есть f — константа. Противоречие.

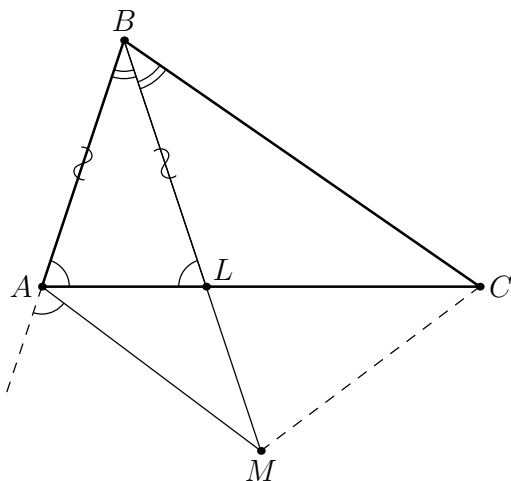


Рис. 15: к задаче 4г

- 4г. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Известно, что $BL = AB$. На продолжении BL за точку L выбрана точка M такая, что $\angle BAM + \angle BAL = 180^\circ$. Докажите, что $BM = BC$.

□ Рис. 15. Пусть $\angle LAB = \angle BLA = \alpha$. Тогда $\angle BAM = 180^\circ - \alpha = \angle BLC$. С другой стороны, $\angle ABL = \angle MBC$. Кроме того, $AB = LB$. Следовательно, треугольники ABM и LBC равны. Отсюда и равенство BM и BC .

- 4с. По кругу лежат 2016 шаров, каждый из которых покрашен в один из 32 цветов, причем шаров каждого цвета ровно 63. Найдите наименьшее n с таким условием: гарантированно найдутся n последовательных шаров, среди которых встречается хотя бы 16 цветов.

□ Ответ: $14 \cdot 63 + 2$.

Оценка. Докажем, что указанного n всегда хватит. Пусть шары расставлены некоторым образом. Если в каждой последовательности n шаров встречаются все цвета, то всё хорошо. Пусть не так; без ограничения общности предполагаем, что в некоторой последовательности длины n нету цвета A . Но где-то на круге он есть. Если мы будем сдвигать нашу последовательность на 1, то в конце концов наткнемся на цвет A . В полученной последовательности длины n этот цвет встречается ровно один раз. По принципу Дирихле, среди оставшихся $14 \cdot 63 + 1$ должны быть еще по крайней мере 15 цветов.

Пример: расставим шары так, что все шары одного цвета идут подряд, однотонными сегментами по 63. Тогда любая последовательность длины $14 \cdot 63 + 1$ или меньше будет перекрываться не более чем с 15 сегментами.

Олимпиада по геометрии (письменная)
Лига 8-9

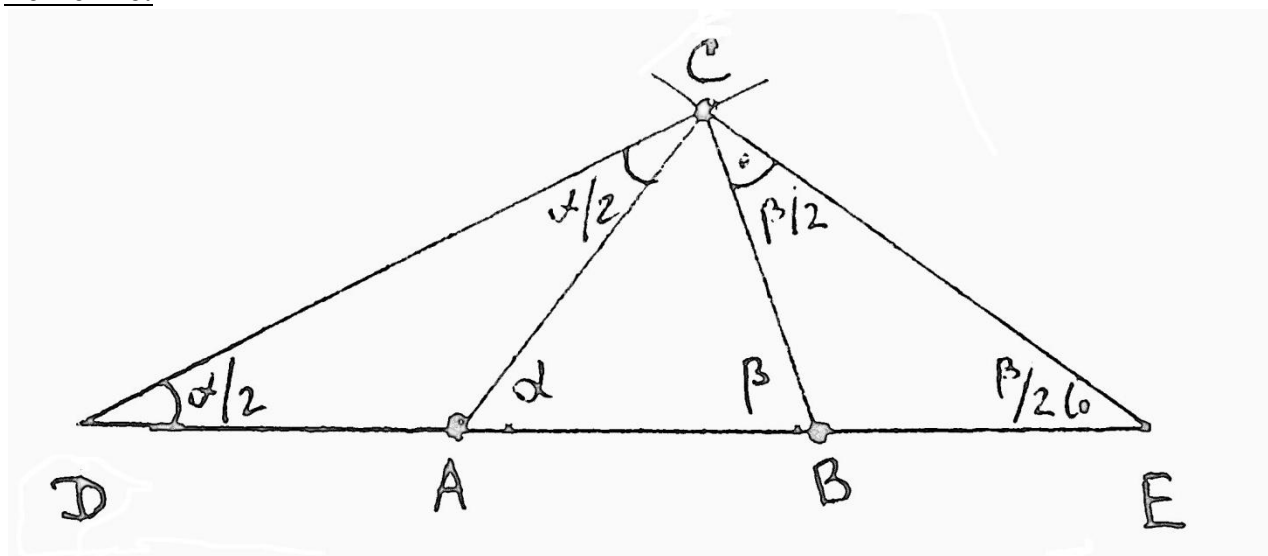
1. Можно ли построить треугольник (циркулем и линейкой без делений) по двум заданным углам α и β и

а) известному периметру P ;

б) какой-либо высоте треугольника?

Если можно – привести алгоритм построения (последовательность действий) и указать количество различных треугольников в каждом случае; если нет – обосновать ответ.

Решение.



Для построения треугольника сделаем следующие действия:

1) Строим отрезок $ED=P$ – заданному периметру. **(1 балл)**

2) В концевых точках этого отрезка строим углы $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ (см. рис.) до пересечения вторых сторон этих углов в точке C ; **(+1 балл)**

3) Из точки C во внутрь треугольника CDE проводим лучи под углами $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ до пересечения с DE в точках A и B . **(+1 балл)**

4) Доказательство, что треугольник ABC – искомый (плюс какие то слова о том, сколько таких треугольников). **(+1 балл)(4 балла)**

Если даны углы α и β , то с точностью до подобия дан треугольник ABC и d – длина высоты (какой либо, т.е. понятно какая высота). Тогда для треугольника ABC надо рассмотреть 3 случая: $d = h_c$, $d = h_a$, $d = h_b$.

За любой случай ставиться по **1 баллу**. Максимум **7 баллов**. Должны быть какие то слова или ссылки на то как опускать перпендикуляр из точки на прямую, как проводить параллельные прямые...

2. Найти стороны прямоугольного треугольника, если известны его периметр P и площадь S .

Решение.

- 1) Если ввести стандартные обозначения: a, b – катеты, c – гипотенуза, $2p = P$, r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей, то имеем следующую систему.

$$\begin{cases} a + b + c = 2p \\ \frac{1}{2}ab = pr = S \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2R \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

(+1 балл)

- 2) из геометрии треугольника имеем следующие соотношения (см. рис.).

$$2p = a + b + 2R = 2(AK + KB) + 2r =$$

$$4R + 2r \Leftrightarrow a + b = 2R + 2r = \sqrt{a^2 + b^2} + 2r$$

$$\Leftrightarrow a + b - 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(+1 балл)

- 3) После возведения в квадрат получаем $ab + 2r^2 = 2r(a + b)$

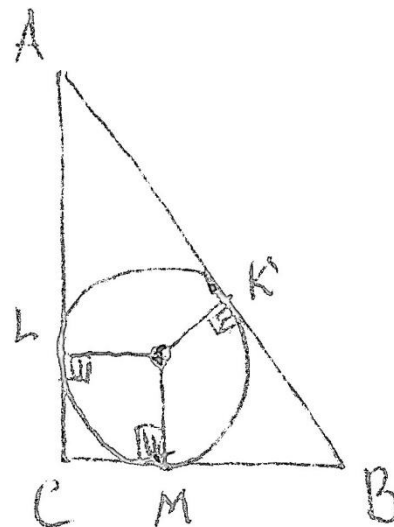
$$\begin{cases} ab + 2r^2 = 2r(a + b) \\ \frac{1}{2}ab = pr = S \end{cases} \quad (+1 \text{ балл})$$

- 4) В итоге имеем систему

$$\begin{cases} a + b = p + \frac{p}{s} \\ ab = 2S \end{cases} \quad (+1 \text{ балл})$$

- 5) Откуда $a, b = \frac{1}{2}\left(p + \frac{p}{s}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(p + \frac{p}{s}\right)^2 - 2S}$ **(+1 балл)**

- 6) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(p + \frac{p}{s}\right)^2 - 4S}$ **(+1 балл)(7 баллов)**

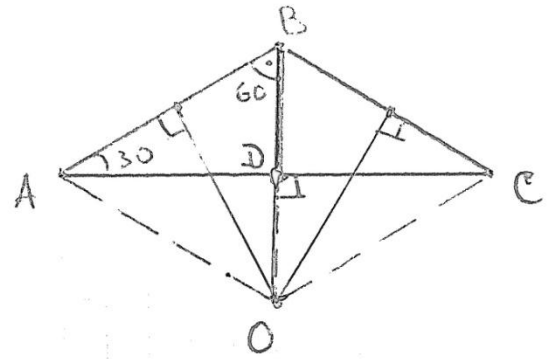


Правильное, но чисто алгебраическое решение (без введения радиусов r и R) системы (1) оценивается в **+3 балла** (в этом случае всего **5 баллов** за решение)

3. В море у берегов Камчатки регулярно фиксируются три подозрительных рыболовецких судна, традиционно находящихся в вершинах одного равнобедренного треугольника с углом 120° и длинами боковых сторон в 20 км. Найти геометрическое место точек (ГМТ) в пространстве, где можно разместить технические средства контроля (с радиусом действия не более 30 км) за незаконным выловом камчатского краба, чтобы все точки этого ГМТ были равноудалены от судов – потенциальных нарушителей природоохранного законодательства.

Решение.

- 1) Если A, B, C – точки местонахождений судов, то треугольник ABC – равнобедренный с углами $B = 120^\circ, A = C = 30^\circ$ и $AB=BC=20$ км. Тогда искомым ГМТ в плоскости треугольника ABC является точка O – центр описанной окружности как пересечение серединных перпендикуляров треугольника ABC . (2



- балла)
- 2) Радиусы этой окружности
 $AO=BO=CO=R=(\text{доказать!})=AB=BC=20$ (+2 балла)
- 3) Тогда в пространстве R^3 искомое ГМТ – часть прямой, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости ABC . (+1 балл)
- 4) Итоговое ГМТ определяется двумя частями этой прямой:
 - подводной частью (где возможно размещение подлодки или подводного буя), которая определяется глубиной моря. (+1 балл)
 - надводной частью до высоты $h = \sqrt{30^2 - 20^2} = 10\sqrt{5}$ км, где возможно размещение беспилотника. (+1 балл)

баллов)

4. Две прямолинейные железные дороги пересекаются в пункте N под углом 60° . Внутри этого угла находится аэродром (точка A) на расстояниях 10 км и 20 км от этих дорог. Найдите местоположения точек B и C (мест погрузки-разгрузки груза) на этих дорогах, чтобы стоимость циклических перевозок по шоссе из A в B , потом в C с возвратом в A была минимальна. Считая, что перевозка 1 т груза по шоссе $ABCA$ стоит 100 руб. за 1 км, определить

- можно ли для груза в 10 т уложиться в сумму 50 тыс. руб., без учета затрат на погрузку-разгрузку грузов?
- Тот же вопрос для суммы в 60 тыс. руб. с учетом затрат на полную перезагрузку грузов (2500 руб. за 10 т) в 2-х пунктах из 4-х? в 3-х пунктах из 4-х? во всех 4-х пунктах?

Решение.

- Построим точку A , отразим ее симметрично относительно железных дорог: получим точки A_1 и A_2 (см. рис.)

(2 балла)

- Соединим точки A_1 и A_2 , тогда пересечение этой линии с железными дорогами дает местонахождение точек B и C .

(+1 балл)

- Тогда периметр треугольника ABC минимален и равен отрезку A_1A_2 . Если это доказано, то оценивается дополнительно.

(+1

балл)

(Доказательство основано на следующем принципе: если хотя бы одна из точек B или C сдвинется, то периметр треугольника ABC будет равен ломаной, соединяющей точки A_1 и A_2 .)

- Измерение линейкой дает $A_1A_2 \approx 53$ км (Сравнение циркулем с выбранным масштабом в 10 км дает $50 < A_1A_2 < 55$ км). Так расходы выходят в сумму равную

$100 \text{ руб} \cdot 10 \cdot 53 = 53000 \text{ руб}$, т.е. в 50 т.р. не уложимся. **(+1 балл)**

- С перезагрузкой грузов в двух пунктах уложиться можно, т.к.

$$53000 + 2500 \cdot 2 = 58000 < 60000,$$

а в четырех пунктах уложиться заведомо нельзя, т.к.

$$53000 + 2500 \cdot 4 = 63000 > 60000.$$

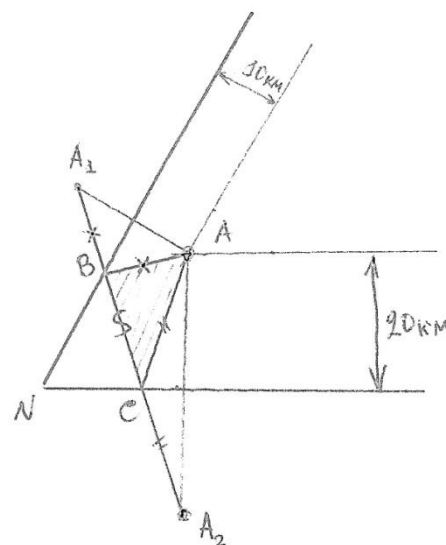
(+1 балл)

- С перезагрузкой в трех пунктах из четырех сумма будет следующей:
 $53000 + 2500 \cdot 3 = 60500$.

Тут потребуется более точная оценка $2p_{ABC} = A_1A_2$.

(+1 балл)(7

баллов)



IX командно-личный турнир «Математическое многоборье»

31 октября – 5 ноября 2016 года, г. Москва

Геометрия (решения)

Старшая лига

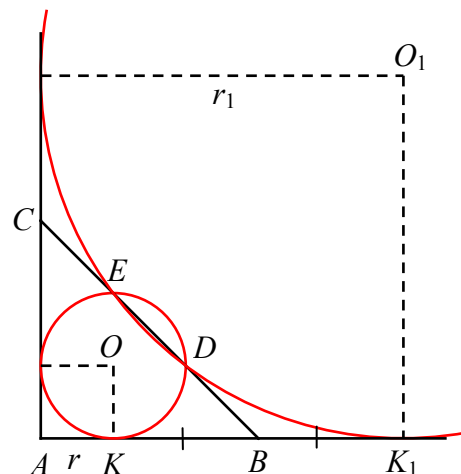
1. Окружность, вписанная в прямой угол равнобедренного прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на 3 равные части. Найдите радиус окружности, если катет треугольника равен 1.

Ответ: $1/3$ или $5/3$.

Решение. Очевидно, что радиус окружности, вписанной в прямой угол A , равен расстоянию от его вершины до точки касания окружности со стороной. Пусть BC , гипотенуза данного треугольника ABC , пересекается с окружностью в точках D и E , K – точка касания с прямой AB (см. рисунок). По теореме о квадрате касательной $BK^2 = BD \cdot BE = (2/9)BC^2 = 4/9$, т.е. $BK = 2/3$.

Если точка касания лежит на катете AB (точка K на рисунке), то искомый радиус $r = AK = 1 - BK = 1/3$.

Если же точка касания лежит на продолжении катета AB (точка K_1 на рисунке), то искомый радиус $r_1 = AK_1 = 1 + BK_1 = 5/3$.



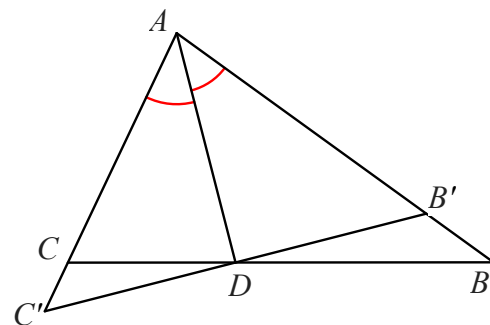
2. Длины биссектрис треугольника не меньше 1. Докажите, что его площадь не меньше $\sqrt{3}/3$.

Решение. Пусть угол A – наибольший в треугольнике ABC , AD – его биссектриса и пусть $AB \geq AC$. Прямая, проходящая через D перпендикулярно AD , отсекает от угла равнобедренный треугольник $AB'C'$ (его вершину, лежащую на стороне AB , обозначим через B'). Используя свойство биссектрисы треугольника, получаем:

$$\frac{S_{DBB'}}{S_{DCC'}} = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{DB'}{DC'} = \frac{AB}{AC} \cdot 1 \geq 1.$$

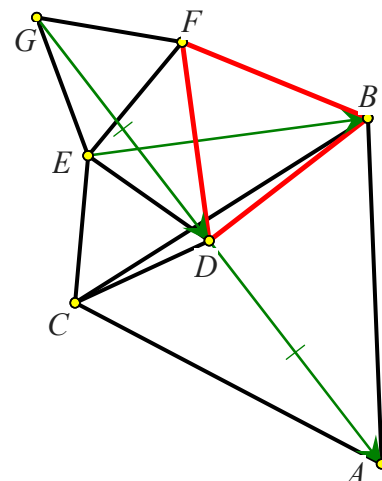
Поэтому

$$S_{ABC} = S_{AB'C'} + S_{DBB'} - S_{DCC'} \geq S_{AB'C'} = AD^2 \tan A/2 \geq \sqrt{3}/3, \text{ т.к. } AD \geq 1, \text{ а } \angle A \geq 60^\circ.$$



3. Цепочка из трех правильных треугольников ABC , CDE и EFG , вершины которых перечислены против часовой стрелки, расположена так, что D – середина AG . Докажите, что треугольник BFD – тоже правильный.

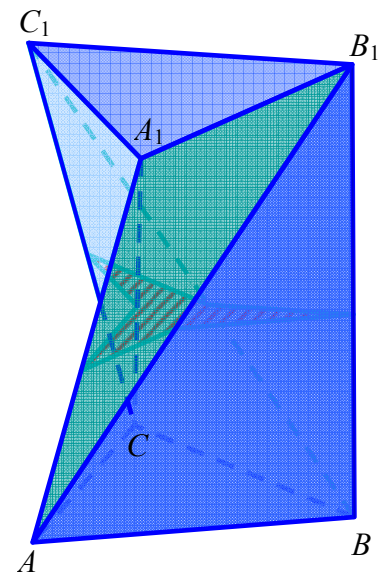
Решение. При повороте на 60° вокруг C , переводящем A в B , точка D переходит в E , т.е. вектор $\overrightarrow{DA}$ переходит в $\overrightarrow{EB}$. Рассмотрим поворот на 60° вокруг F в том же направлении. Он переводит вектор $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DA}$ в вектор, равный $\overrightarrow{EB}$, а точку G – в E , поэтому точка D при этом повороте переходит в B , а это и значит, что треугольник FDB – правильный.



4. Выпуклый многогранник содержит любой из тетраэдров, вершинами которых являются какие-либо четыре вершины многогранника. Существует ли многогранник, который не содержит ни один из таких тетраэдров?

Ответ: Существует.

Решение. Пример можно построить так. Возьмем правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ и повернем ее основание $A_1B_1C_1$ в его плоскости вокруг его центра на угол $\alpha < 60^\circ$. Рассмотрим многогранник, полученный выбрасыванием из выпуклой оболочки треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ тетраэдров ABA_1B_1 , BCB_1C_1 и CAC_1A_1 (на рисунке показан этот многогранник и одно из его сечений, параллельных основаниям). Этот многогранник не содержит ни одного из тетраэдров с вершинами в точках A, B, C, A_1, B_1, C_1 , т.к. любой из таких тетраэдров имеет в качестве ребра один из отрезков BA_1 , CB_1 или AC_1 , а все эти отрезки мы удалили вместе с тетраэдрами.



Письменная олимпиада «Алгебра и теория чисел»
Младшая лига

Условия и решения

1. Найдите $2a + 3b + 4c$, если известно, что

$$\begin{cases} a^2 + 2 = 4b + c, \\ b^2 + 3 = 3c - a, \\ c^2 + 4 = 5a - 2b \end{cases}$$

2. Найдите все тройки простых чисел (a, b, c) такие, что $a - b - 8$ и $b - c - 8$ тоже простые.
3. Для любого натурального числа n

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}}.$$

Найдите $f(1) + f(2) + \dots + f(40)$.

4. Найдите все пятизначные числа, состоящие из ненулевых цифр, такие, что, каждый раз зачеркивая первую цифру, мы получаем делитель предыдущего числа.

Решения

Задача 1.

Ответ: 15

Сложим все уравнения и выделим полные квадраты. Получим $(a - 2)^2 + (b - 1)^2 + (c - 2)^2 = 0$, тогда $a = 2, b = 1$ и $c = 2$. Тогда $2a + 3b + 4c = 15$.

Задача 2.

Ответ: $(23, 13, 2), (23, 13, 3)$

Случай 1. Пусть $a - b - 8$ и $b - c - 8$ оба четные, тогда $a - b - 8 = b - c - 8 = 2$. Тогда $a = c + 20, b = c + 10$. Но $c, c + 10, c + 20$ дают разные остатки при делении на 3.

Поэтому единственный случай, который нам подходит – это $(23, 13, 3)$.

Случай 2. Пусть $a - b - 8$ – нечетное. Тогда a и b разной четности. А раз $a > b$, то $b = 2$. Но $b > c - 8$. Значит, такого случая быть не может.

Случай 3. Пусть $b - c - 8$ – нечетное. Из аналогичных соображений получаем $c = 2$. Из предыдущего случая мы знаем, что $a - b - 8$ может быть только четным, следовательно $a - b - 8 = 2$. Поэтому $a = b + 10$. Итак, мы доказали, что числа $b + 10, b, b - 10$ – простые. Они дают разные остатки при делении на 3. Поэтому $b - 10 = 3$. Получаем решение $(23, 13, 2)$.

Задача 3.

Ответ: 364

Пусть $x = \sqrt{2n + 1}$, а $y = \sqrt{2n - 1}$. Тогда $x^2 + y^2 = 4n, xy = \sqrt{4n^2 - 1}, x^2 - y^2 = 2$.

Получаем $f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(2n + 1)^3} - \frac{1}{2} \sqrt{(2n - 1)^3}$.

Тогда $f(1) + f(2) + \dots + f(40) = \frac{1}{2} \sqrt{81^3} - \frac{1}{2} \sqrt{1^3} = 364$.

Задача 4.

Ответ: 91125, 53125, 95625.

Пусть наше число – это $\overline{abcde}$. Тогда $\overline{abcde} : \overline{bcde}$. Следовательно, $a \cdot 10^4 : \overline{bcde}$. Тогда $\overline{bcde} = x \cdot 2^k \cdot 5^l$, где $x|a$.

Пусть $l = 0$, тогда $\overline{bcde} \leq 9 \cdot 2^4 = 144$. Следовательно, $b = 0$. Но нам нужны все ненулевые цифры.

Итак, $l > 0$. Но тогда $k = 0$. Иначе $\overline{bcde} : 10$.

Докажем, что $l > 2$. Предположим противное, но тогда $\overline{bcde} \leq 9 \cdot 5^2 = 225$.

Случай 1. Пусть $l = 3$. Тогда $x = 9$. Иначе $\overline{bcde} \leq 8 \cdot 125$. Получившееся число – это 91125.

Случай 2. Пусть $l = 4$. Тогда $\overline{bcde} = x \cdot 625$. Заметим, что x - нечетное и $x \geq 3$. Оставшееся проверяем.

Если $x = 3$, то $\overline{bcde} = 1875$. Но 1875 не делится на 875.

Если $x = 5$, то $\overline{bcde} = 3125$. Получаем 53125 и оно нам подходит.

Если $x = 7$, то $\overline{bcde} = 4375$. Но 4375 не делится на 375.

Если $x = 9$, то $\overline{bcde} = 5625$. Получаем 95625 и оно нам подходит.

Письменная олимпиада «Алгебра и теория чисел»

Старшая лига

Условия и решения

1. Числа $x, y, z \neq 0$ таковы, что $\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy} + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} + \frac{z^2+x^2-y^2}{2xz} = 1$.

Какие значения может принимать выражение

$$\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)^{2016} + \left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)^{2016} + \left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}\right)^{2016} ?$$

Ответ: 3.

Решение: Домножим на $2xyz$, перенесем в одну сторону, получим $z(x^2 + y^2 - z^2) + x(y^2 + z^2 - x^2) + y(z^2 + x^2 - y^2) - 2xyz = 0$. Разложим на множители: $(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = 0$. Следовательно, одно из чисел равно сумме двух других. Тогда выражения, стоящие в скобках равны ± 1 .

2. Положительные числа $x_1, \dots, x_{2016}$ таковы, что $x_1 + \dots + x_{2016} = 1$. Докажите, что

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_{2016}) < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{2015}{2016} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{2014}{2016} + \dots + \frac{1}{2016!} \cdot \frac{1}{2016}$$

Решение: Применим неравенство Коши:

$$\sqrt[2016]{(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_{2016})} \leq \frac{2016 + x_1 + \dots + x_{2016}}{2016} = 1 + \frac{1}{2016}.$$

Возведем в 2016 степень и раскроем по биному Ньютона:

$$(1 + x_1) \cdot \dots \cdot (1 + x_{2016}) \leq 1 + C_{2016}^1 \cdot \frac{1}{2016} + C_{2016}^2 \cdot \left(\frac{1}{2016}\right)^2 + \dots + C_{2016}^{2016} \cdot \left(\frac{1}{2016}\right)^{2016}.$$

Оценим k -е слагаемое в сумме

$$C_{2016}^k \left(\frac{1}{2016}\right)^k = \frac{2016!}{k!(2016-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2016}\right)^k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(2016-k+1) \cdot \dots \cdot 2016}{2016^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(2016-k+1)}{2016} \cdot \frac{(2016-k+2) \cdot \dots \cdot 2016}{2016^k} \leq \frac{1}{k!} \cdot \frac{(2016-k+1)}{2016}, \text{ причем при } k > 2 \text{ неравенство строгое.}$$

3. Решите в целых числах систему:

$$\begin{cases} abcd = c + 199 \\ 51a^6 + 5c^2 + 20|b + d| = 2016 \end{cases}$$

Ответ: (-1,2,1,-100); (-1,-2,1,100); (-1,100,1,-2); (-1,-100,1,2).

Решение: Преобразуем первое уравнение $c(abd - 1) = 199$. Число 199 – простое, следовательно, c может принимать значения 1, -1, 199, -199. Заметим, что второе уравнение не может быть выполнено при $c = \pm 199$. Таким образом $c = 1, -1$.

Рассмотрим случай $c = 1$ (случай $c = -1$ рассматривается аналогично).

$$\begin{cases} abd = 200 \\ 51a^6 + 20|b + d| = 2011 \end{cases}$$

Заметим, что $51 \cdot 16 = 3264 > 2016$, следовательно $a = 0, 1, -1$. Но a не может быть нулем, т.к. 2011 не делится на 20. Значит $|b+d| = 98$ и $bd = \pm 200$. При $a = 1$ решений нет, а при $a = -1$ получаем 4 решения: $b = 2, d = -100$; $b = -2, d = 100$; $b = 100, d = -2$; $b = -100, d = 2$.

4. Дан многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, такой, что уравнение $P_n(x) = 2016$ имеет не менее пяти целочисленных решений.

Докажите, что уравнение $P_n(x) = 2001$ не имеет решений в целых числах.

Решение: По т. Безу $P_n(x) - 2016 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_5)Q(x)$. Подставив 2001, получим $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_5)Q(x) = 15$, но 15 нельзя представить как произведение 5 различных целочисленных сомножителей (максимум 4, например: 1, -1, 3, -5).

Комбинаторика и логика (с решениями)

Младшая лига

1. На доске нарисован правильный 2016-угольник. Петя провел в нем несколько диагоналей так, что он распался на треугольники. Каких треугольников могло получиться больше и на сколько: тех, у кого стороны не совпадают со сторонами 2016-угольника, или тех, у кого две стороны совпадают со сторонами 2016-угольника?

□ *Ответ:* треугольников второго вида на 2 больше.

Есть три вида треугольников: те, у кого стороны не совпадают со сторонами многоугольника (пусть их x), те, у кого ровно одна сторона совпадает со стороной многоугольника (пусть их y) и те, у кого две стороны совпадают со сторонами многоугольника (пусть их z). Из триангуляции следует, что общее количество треугольников — $2014 = x + y + z$. Кроме этого общее количество сторон многоугольника — $2016 = y + 2z$. Из этого следует, что при любом разбиении $z - x = (y + 2z) - (x + y + z) = 2016 - 2014 = 2$.

2. Можно ли на клетчатой доске 2016×2016 расставить несколько фишек так, чтобы на каждой диагонали (включая одноклеточные) стояло нечетное количество фишек?

□ *Ответ:* нельзя.

Предположим, что можно. Покрасим клетки доски в шахматную раскраску и проследим за черным цветом. Заметим, что черных диагоналей одного из направлений четное количество, а другого нечетное. Тогда с одной стороны на черных клетках стоит четное количество фишек, а с другой — нечетное. Значит требуемая расстановка невозможна.

3. У старого короля есть три сына близнеца. У первого сына есть два наследника, у второго — три, а у третьего — пять. Всем известно, что старый король скоро объявит, какой именно сын сменит его на престоле. На какое наименьшее количество провинций можно разделить королевство так, чтобы при любом выборе старого короля, новый король мог бы раздать все округа своим наследникам, и каждому из них досталась бы территория одинаковой площади?

□ *Ответ:* 8.

Пусть площадь всего королевства равна 30. Нам необходимо уметь делить его на 5 равных частей. Получается, что площадь каждой провинции не должна превосходить $6 = 30 : 5$. Из этого следует, что 6 провинций будет недостаточно (иначе при разбиении на 5 равных частей, четыре части будут содержать ровно по одной провинции, тогда у нас будет хотя бы четыре провинции площадью 6, что противоречит возможности разбить на три равные части всё королевство).

Предположим, что возможно разделить королевство на семь провинций, тогда из аналогичных рассуждений следует, что есть хотя бы три провинции площадью 6. Но, как мы доказали выше, четырех провинций площадью 6 быть не может, получается, что их ровно три.

Из возможности разбиения на три равные части следует, что среди оставшихся четырех провинций есть две провинции площадью 4. И что сумма площадей двух оставшихся провинций также равна 4. Чтобы в итоге все провинции можно было разбить на пять равных частей, необходимо, чтобы две последние провинции имели площадь 2. Получилось, что площади всех провинций — четна. И это противоречит разбиению на две равные части (по 15).

Пример для восьми провинций: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6.

4. В ряд стоят 100 толстяков. Масса любых двух подряд идущих отличается не более чем на 1 кг. Докажите, что их можно рассадить в автоколонну из 25 одинаковых машин (по 4 человека в машину) так, чтобы масса любых двух подряд идущих «груженых» машин также отличалась не более чем на 1 кг.

□ Переставим толстяков в ряд по весу: от самого легкого к самому тяжелому. Пусть их веса будут $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. При этом масса любых двух подряд идущих толстяков будет отличаться не более чем на 1 кг. Действительно, если это не так, пусть нашлись такие толстяки a_i и a_{i+1} , что $a_{i+1} > a_i + 1$. Назовем толстяков $a_1, a_2, \dots, a_i$ первой частью, а остальных — второй частью. Понятно, что в исходном ряду найдутся два соседа из разных частей. Но тогда их веса отличаются более, чем на 1.

Разобьем толстяков на 4 группы: $a_1, \dots, a_{25}, a_{26}, \dots, a_{50}, a_{51}, \dots, a_{75}, a_{76}, \dots, a_{100}$. Посадим в i -ую машину толстяка a_i , а потом будем подсаживать толстяков из второй группы следующим образом: в i -ую машину посадим к толстяку a_i толстяка a_{51-i} . Проверим, что веса соседних машин будут отличаться не более, чем на 1: $a_i + a_{51-i} \geq a_i + a_{50-i} \geq a_{i+1} + a_{50-i} - 1$ с одной стороны и $a_i + a_{51-i} \leq a_{i+1} + a_{51-i} \leq a_{i+1} + a_{50-i} + 1$ с другой. Теперь можно упорядочить машины по весу, и провести аналогичную процедуру подсаживания с третьей группой толстяков (в i -ую машину в новом, упорядоченном ряду, подсаживаем толстяка a_{76-i}). Затем опять упорядочиваем и подсаживаем 4-ую группу.

5. Каждый школьник решил одну из 20 задач по математике и одну из 11 задач по физике. Известно, что у любых двух студентов наборы задач не совпадают. При этом для каждого школьника верно следующее: какую-то из тех двух задач, которые он решил, решило еще не более одного школьника. Каково наибольшее возможное количество школьников?

□ Ответ: 54.

Построим двудольный граф, в котором вершины верхней доли будут соответствовать задачам по математике, вершины нижней доли будут соответствовать задачам по физике, а ребро между вершинами — школьнику, который решил эти задачи. Так как у любых двух школьников наборы задач не совпадают, то граф получится без кратных ребер. Также из условия следует, что для любого ребра степень одной из его вершин не больше двух.

Пример. Приведем пример графа с наибольшим количеством ребер. В верхней доле вершины 1 и 2 соединены со всеми вершинами 1-9 из нижней доли, а вершины 3-20

из верхней доли соединены с вершинами 10 и 11 каждая (других ребер нет). Всего ребер здесь $2(20 - 2 + 11 - 2) = 54$.

Оценка. Докажем, что больше ребер быть не может. Пусть в верхней доле k вершин степени больше 2 (множество A), а в нижней таких вершин l (множество B). Соответственно, в верхней доле $20 - k$ вершин степени не больше 2 (множество C), а в нижней $11 - l$ (множество D). Заметим, что между частями A и B ребер быть не может. Из C выходит не более $2(20 - k)$ ребер, из D не более $2(11 - l)$ ребер. Значит всего ребер не более $2(31 - k - l)$.

Если $k = 0$, то все вершины в верхней доле степени не больше 2, т. е. ребер не больше 40. Аналогично, если $l = 0$, то ребер не больше 22. Если $k = 1, l = 2$, то ребер между частями A и D ребер не более 9 (т. к. в части A одна вершина, в части C 9 вершин), остальные ребра выходят из части B и их не более $19 \cdot 2 = 38$, т. е. всего не более 47 ребер. Если же $k = 2, l = 1$, то между частями B и C не более 18 ребер, остальные ребра из D и их не более $10 \cdot 2 = 20$, т. е. всего не более 38 ребер. Наконец, если $k = 1, l = 1$, то между частями A и D ребер не более 10, остальные ребра выходят из C и их не более $19 \cdot 2 = 38$, т. е. не более 48. В остальных случаях $k + l \geq 4$, а значит ребер не более 54.

Старшая лига

1. Пусть S — множество всех разбиений числа 2000 в сумму натуральных слагаемых. Для каждого разбиения $p \in S$ обозначим через $f(p)$ сумму количества слагаемых и максимального числа в разбиении. Найдите минимальное значение $f(p)$.

□ Ответ: 90.

Пусть x — максимальное число, а y — количество слагаемых в разбиении p . Тогда понятно, что $xy \geq 2000$.

При этом $f(p) = x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{2000} > 89$. То есть $f(p)$ не меньше 90. А 90 оно равняться может; например, если у нас 40 слагаемых, каждое из которых равно 50.

2. Можно ли на клетчатой доске 2016×2016 расставить несколько фишек так, чтобы на каждой диагонали (включая одноклеточные) стояло нечетное количество фишек?

□ Ответ: нельзя.

Предположим, что можно. Покрасим клетки доски в шахматную раскраску и проследим за черным цветом. Заметим, что черных диагоналей одного из направлений четное количество, а другого нечетное. Тогда с одной стороны на черных клетках стоит четное количество фишек, а с другой — нечетное. Значит, требуемая расстановка невозможна.

3. В ряд стоят 100 толстяков. Масса любых двух подряд идущих отличается не более чем на 1 кг. Докажите, что их можно рассадить в автоколонну из 25 одинаковых машин (по 4 человека в машину) так, чтобы масса любых двух подряд идущих «груженых» машин также отличалась не более чем на 1 кг.

□ Переставим толстяков в ряд по весу: от самого легкого к самому тяжелому. Пусть их веса будут $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. При этом масса любых двух подряд идущих толстяков будет отличаться не более чем на 1 кг. Действительно, если это не так, пусть нашлись

такие толстяки a_i и a_{i+1} , что $a_{i+1} > a_i + 1$. Назовем толстяков $a_1, a_2, \dots, a_i$ первой частью, а остальных — второй частью. Понятно, что в исходном ряду найдутся два соседа из разных частей. Но тогда их веса отличаются более, чем на 1.

Разобьем толстяков на 4 группы: $a_1, \dots, a_{25}, a_{26}, \dots, a_{50}, a_{51}, \dots, a_{75}, a_{76}, \dots, a_{100}$. Посадим в i -ую машину толстяка a_i , а потом будем подсаживать толстяков из второй группы следующим образом: в i -ую машину посадим к толстяку a_i толстяка a_{51-i} . Проверим, что веса соседних машин будут отличаться не более, чем на 1: $a_i + a_{51-i} \geq a_i + a_{50-i} \geq a_{i+1} + a_{50-i} - 1$ с одной стороны и $a_i + a_{51-i} \leq a_{i+1} + a_{51-i} \leq a_{i+1} + a_{50-i} + 1$ с другой. Теперь можно упорядочить машины по весу, и провести аналогичную процедуру подсаживания с третьей группой толстяков (в i -ую машину в новом, упорядоченном ряду, подсаживаем толстяка a_{76-i}). Затем опять упорядочиваем и подсаживаем 4-ую группу.

4. В двух клетках таблицы $n \times n$ стоит знак «-», в остальных «+». За один ход разрешается выбрать любую строчку или столбец и поменять в ней все знаки на противоположные. После нескольких ходов оказалось, что в таблице ровно 9 знаков «-». При каком максимальном n такое могло получиться?

□ Ответ: 11.

Понятно, что если какая-то строчка или столбец меняется дважды (не обязательно соседними ходами), то эти ходы «сокращают» друг друга и никак не влияют на итоговое количество минусов и плюсов в таблице. Таким образом, мы можем считать, что каждую строчку и каждый столбец меняли не более одного раза.

Оценка. Прделаем те же действия с доской из всех плюсов. Тогда мы получим не более 11 минусов. Пусть мы меняли x строчек и y столбцов. Тогда в таблице будет $xy + (n - x)(n - y)$ плюсов и $x(n - y) + y(n - x)$ минусов. Разность между количеством плюсов и количеством минусов равна $(n - 2x)(n - 2y)$ и должна быть не меньше $n^2 - 22$.

Если хотя бы одно из чисел x и y не равно нулю и не равно n , то $(n - 2x)(n - 2y) \leq n(n - 2) = n^2 - 2n$, откуда $2n \leq 22$, то есть $n \leq 11$.

Пример для $n = 11$ построить совсем просто. Пусть в начале оба минуса стояли в первой строчке, и мы сделали ровно один ход, изменив как раз первую строчку.

5. В одном государстве некоторые города соединены двусторонними авиалиниями, причем число авиалиний ровно в 5 раз больше числа городов. Докажите, что количество двусторонних авиамаршрутов ровно с одной пересадкой не менее чем в 45 раз превосходит число городов. (Двусторонний авиамаршрут означает, что маршруты $A-B-C$ и $C-B-A$ считаются за один. Концы маршрута всегда различны.)

□ Пусть у нас всего n городов. Занумеруем города от 1 до n и обозначим через x_i - количество авиалиний, выходящих из города i . Тогда маршрутов, с пересадкой в горде i , ровно $C_{x_i}^2$ штук. То есть всего маршрутов с одной пересадкой

$$\sum_{i=1}^n C_{x_i}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2} - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2}.$$

Заметим, что количество авиалиний в стране равно $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/2 = 5n$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим следует, что сумма квадратов не меньше квадрата суммы, деленного на n . Получаем

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n^2} &\geq \\ &\geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n^2} - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n^2} = \frac{100n}{n^2} - \frac{10n}{n^2} = \frac{90}{n}. \end{aligned}$$

Командная устная олимпиада, 8-9 класс, 2016

1. Известно, что

$$\begin{cases} x - y > 97, \\ x^2 - \frac{1}{y + \frac{1}{x}} > 2, \\ x + \frac{y}{z} + \frac{z}{x + 57y} = 2016. \end{cases}$$

Верно ли, что $\frac{x + 2\frac{y}{z}}{\frac{1}{y + \frac{1}{x}} + (x - y)} > 95$?

Ответ: нет, т.к. при $x = 100, y = 0$ имеем: $z = 191600$, откуда и получается ответ.

2. Вася и Лёша написали наборы целых чисел. Вася написал все наборы чисел длины n с элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$ такими, что $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq k$. Лёша написал все наборы чисел длины k с элементами $b_1, b_2, \dots, b_k$ такими, что $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_k| \leq n$. Докажите, что Лёша и Вася написали одинаковое число наборов.

Решение: подсчитаем число наборов, которые написал Лёша. Предположим, что всего r элементов отличных от нуля в каком-то наборе. Их абсолютные значения дают набор положительных чисел $c_1, c_2, \dots, c_r$ таких, что $c_1 + c_2 + \dots + c_r \leq k$. Мы можем добавить один положительный элемент c_0 такой, что $c_0 + c_1 + \dots + c_r = k + 1$. Таких наборов всего будет C_k^r . Задав любой такой набор, мы можем выбрать r чисел в наборе Лёши так, чтобы каждое из r чисел имело знак. Таким образом, Лёша написал всего наборов

$$\sum_{r=0}^n C_n^r C_k^r 2^r = \sum_{r=0}^{\infty} C_n^r C_k^r 2^r.$$

Сумму можно брать до бесконечности, поскольку для $r > \min\{k, n\}$ числа в наборе равны нулю. Отсюда видно, что если мы поменяем n и k местами, у нас получится то же число.

3. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ - попарно различные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Найдите максимум величины

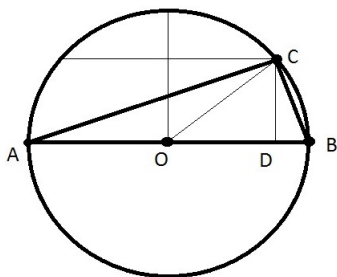
$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|},$$

при условии, что $A_{2n+1} = A_1$.

Решение: Покажем, что для всех $i \neq j$, $\frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|} \leq \frac{1}{2}$. Если A_i и A_j не пересекаются, то эта дробь равна 0. Предположим без ограничения общности, что $|A_i| \leq |A_j|$. Если они пересекаются, заметим, что $|A_j| \geq 2$. Также $|A_i \cap A_j| \leq |A_i|$. Таким образом, $\frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|} \leq \frac{1}{2}$. Это означает, что наибольшее значение, которое может принять сумма, равно n . Оно достигается для $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{2, 3\}, \dots, A_{2n-1} = \{n\}, A_{2n} = \{n, 1\}$.

4. Постройте прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c , если известно, что медиана, проведённая к c , есть среднее геометрическое его катетов.

Решение:



Пусть прямоугольный треугольник ABC - искомый. Из середины O его гипотенузы $AB = c$ опишем окружность радиуса $\frac{c}{2}$. Как известно, она будет описанной около треугольника ABC . Через вершину C проводим высоту h_c . Вычислим площадь треугольника ABC :

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

По условию $|AC| \cdot |CB| = |CO|^2 = \frac{c^2}{4}$, но $|AC| \cdot |CB| = 2S$. Значит, $c \cdot h_c = \frac{c^2}{4}$. Следовательно, $h_c = \frac{c}{4}$. Поэтому вершина C является одной из точек пересечения окружности, построенной на отрезке AB данной длины c как на диаметре и прямой, параллельной AB и отстоящей от AB на расстояние $\frac{c}{4}$.

5. В зале находятся 100 человек, каждый из которых знаком по крайней мере с 67 из остальных присутствующих. Можно ли утверждать, что в зале непременно найдутся четыре человека, из которых любые два знакомы друг с другом? Считаем, что если A знает B , то и B знает A .

Решение: Ответ положительный. В самом деле, пусть Z - множество людей, находящийся в зале. Наши рассуждения упрощаются, если мы условимся считать, что каждый из тех, кто находится в зале, знаком сам с собой. Такое соглашение не меняет утверждения задачи, которое требуется доказать. Приняв его, мы можем утверждать, что каждый $X \in Z$ не знаком не более, чем с 32 членами множества Z . Пусть A - произвольный элемент Z . Если все, кто не знаком с A , покинут зал, то множество Z_1 оставшихся людей будет насчитывать не менее, чем $100 - 32 = 68$ человек. Пусть B - любой отличный от A элемент Z_1 . Если зал теперь покинут все, кто не знаком с B , то оставшиеся в зале образуют множество Z_2 , в котором насчитывается не менее $68 - 32 = 36$ человек. Пусть C - элемент Z_2 , отличный от A и от B . После того, как из зала выйдут все, кто не знаком с C , в зале останется не менее $36 - 32 = 4$ человека, и среди них найдется человек, отличный от A , B и C . Обозначим его через D . Тогда A, B, C и D образуют искомую четверку людей, т.к. D знаком с A, B, C ; C знаком с A, B , наконец, B знаком с A .

6. Квадратная таблица, содержащая n строк и n столбцов (n -нечетное число), заполнена числами $1, 2, \dots, n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа. Кроме того, таблица заполнена симметрично относительно одной своей диагонали. Верно ли, что на этой диагонали встречаются все числа от 1 до n ?

Решение: Верно. Пусть k - любое из чисел $1, 2, \dots, n$. Оно встречается в таблице нечетное число раз (по одному в каждой строке). Однако вне диагонали, являющей осью симметрии таблицы, оно встречается четное число раз, так как таблица симметрична. Поэтому k обязательно встретится на этой диагонали.

7. Пусть m, n, p, l - натуральные числа. Если у следующей системы:

$$\begin{cases} np^2 + ml^2 \leq 23456, \\ mn + p^7l = 1626, \\ m(l+1)^p + npl = 2197 + m, \end{cases}$$

есть решения, то предъявить то из них, для которого сумма $m + n + p + l$ минимальна. Иначе - доказать, что решений нет.

Решение: $m(l+1)^p - m = m((l+1)^p - 1):l$, тогда из последней строчки системы получаем, что $2197 = 13^3:l$, откуда $l = 1, 13, 13^2$ или 13^3 . Из первой строчки системы $l^2 \leq ml^2 \leq 23456$, откуда $l = 1$ или $l = 13$. Далее, $lp^7 \leq 1626$, откуда $p = 1, 2$ при $l = 1$ и $p = 1$ при $l = 13$. Остается рассмотреть три случая: $(l, p) = (1, 1), (1, 2), (13, 1)$. В каждом случае второе и третье уравнение системы дают соотношения на m, n , которые приводят к квадратному уравнению без целых решений. Ответ: решений нет.

8. Доказать, что если натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению

$$x^n + y^n = z^n,$$

то $\min(x, y) \geq n$. (Ссылаться на великую теорему Ферма запрещено.)

Решение: не уменьшая общности, считаем $x \leq y$. Поскольку $z^n = x^n + y^n > y^n$, то $z > y$, откуда $z \geq y + 1$. Возведем обе части этого равенства в степень n , получим:

$$z^n \geq (y + 1)^n = y^n + C_n^1 y^{n-1} + \dots + 1 \geq y^n + ny^{n-1},$$

откуда, учитывая исходное уравнение, получаем, что $x^n \geq ny^{n-1}$, но $x \leq y$, поэтому $x^n \geq nx^{n-1}$, т.е. $x \geq n$, что и требовалось.

9. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , прямые AD и BC - в точке F . Биссектриса угла AEC пересекает сторону BC в точке M и сторону AD в точке N , а биссектриса угла BFD пересекает сторону AB в точке P и сторону CD в точке Q . Доказать, что четырехугольник $MPNQ$ - ромб.

Решение: Пусть $O = EN \cap FP$. Рассмотрим треугольники EAF, ECF, EOF . Каждый из углов при основании EF в треугольнике EOF равен среднему арифметическому углов треугольников EAF и ECF при той же вершине. Отсюда следует, что и третий угол $\angle EOF$ треугольника EOF равен среднему арифметическому углов $\angle EAF$ и $\angle ECF$ треугольников EAF и ECF , противолежащих общему основанию EF . Отсюда $\angle PON = \frac{\angle EAF + \angle BCD}{2}$. Но $\angle EAF + \angle BCD = 180$, т.к. четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Отсюда $\angle PON = 90^\circ$. Далее, в треугольнике EQP имеем: EO - биссектриса (по построению) и высота (по только что доказанному). Значит, $QO = OP$. Аналогично, взяв треугольник $FNМ$ получаем, что $NO = OM$. Т.о. диагонали $ABCD$ пересекаются под прямым углом и делятся точкой пересечения пополам. Значит, $ABCD$ - ромб.

**IX командно-личный турнир
«Математическое многоборье»**

31 октября – 5 ноября 2016 года, г. Москва

**Командная устная олимпиада (условия и решения)
Старшая лига 10-11 классы**

1. (10 баллов) В треугольнике ABC с углом $\alpha = 15^\circ$ и неизвестными длинами сторон a, b, c выполняется соотношение $b = \sqrt{a(a+c)}$. Найти площадь треугольника ABC, если радиус вписанной окружности $r = 1$. Ответ представить в виде суммы чисел.

Решение.

$$b = \sqrt{a(a+c)} \Leftrightarrow b^2 = a^2 + ac \Leftrightarrow b^2 - a^2 = ac \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \gamma \quad (1)$$

Последний переход справедлив по теореме синусов: $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \sin \gamma$.

$$(1) \Leftrightarrow (\sin \beta + \sin \alpha)(\sin \beta - \sin \alpha) = \sin \alpha \cdot \sin[\pi - (\alpha + \beta)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} = \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha) = \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta)[\sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha] = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) \sin \frac{\beta - 2\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = 0 \\ \sin \frac{\beta - 2\alpha}{2} = 0 \\ \cos \frac{\beta}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \beta - 2\alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \beta = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Из полученных вариантов в треугольнике возможно только $\beta = 2\alpha$, при $k = 0$.

Из условия $\alpha = 15^\circ$ получаем $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 135^\circ$.

Тогда в треугольнике ABC получаем

$$a = 2R \sin 15^\circ = \frac{1}{2} R(\sqrt{6} - \sqrt{2}); b = 2R \sin 30^\circ = R;$$

$$c = 2R \sin(90^\circ + 45^\circ) = 2R \cos 45^\circ = R\sqrt{2};$$

Причем $\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ)$ честно подсчитан или через половинный угол.

$$p = R \frac{2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = p \cdot r \Leftrightarrow \frac{1}{4} R^2 (2\sqrt{3} - 2) = \frac{1}{4} R (2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 2}$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{4} R^2 (2\sqrt{3} - 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2 + \sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2. (10 баллов) При моделировании развития некоторого процесса во времени t физик вывел зависимость $y_1(t) = 2^{-4t}$, а механик для того же процесса получил зависимость $y_2(t)$, которая оказалась обратной функцией к $y_1(t)$. Начавшийся научный спор прекратил математик, который доказал, что обе эти зависимости в некотором интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ достаточно близки к гиперболической функции $y_3(t) = \frac{c}{t}$, где c – некоторая постоянная, а

уравнения $y_1 = y_3$ и $y_2 = y_3$ в этом интервале времен имеют по два точных решения, которые, если знать c , легко угадываются.

- 1) Надо найти это значение c и минимальный интервал $[t_1, t_2]$, где справедливо утверждение математика.
- 2) Определить, сколько точных решений имеет уравнение $y_1 = y_2$.

Решение.

$$y_1(t) = 2^{-4t} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^t = \left(\frac{1}{16}\right)^t$$

$$y_2(t) = \log_{\frac{1}{16}} t$$

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^t = \log_{\frac{1}{16}} t \quad (1)$$

Поскольку в уравнении (1) участвуют взаимнообратные функции, то оно обязано иметь решение на биссектрисе первой четверти $t_* = y_*$.

Однако легко проверяется (“угадайка”, которая бросается в глаза), что уравнение (1) имеет ещё два решения:

$$\text{При } t_1 = \frac{1}{4} \text{ поскольку } \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \log_{\frac{1}{16}} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{При } t_2 = \frac{1}{2} \text{ поскольку } \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \log_{\frac{1}{16}} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Константа c в $y_3(t)$ восстанавливается для этих симметричных решений $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$y_3(t) \cdot t = \frac{1}{8} = c$$

Из угаданных решений понятно, что $\min[t_1, t_2] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

Ответ: 1) $c = \frac{1}{8}$; $[t_1, t_2] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$; 2) 3 решения (доказанное t_* и угаданные $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{1}{2}$).

3. (10 баллов) Из листа жести площадью $2a^2$ требуется изготовить закрытую коробку в форме параллелепипеда с максимальным объемом $V_m = \max V$.

- 1) Каковы размеры ребер такой коробки? Жесть можно гнуть по прямым линиям и резать, но нельзя соединять (склеивать или сваривать) различные части разрезанного листа.
- 2) Тот же вопрос про $\max V$ и длины ребер для открытой коробки (без крышки) из прямоугольного листа жести размером b на c . Найти $\max V$ при заданном периметре этого листа.

Решение.

Пусть x, y, z , – ребра искомого прямоугольного параллелепипеда, тогда $V = xyz$, а площадь его поверхности $S = 2(xy + xz + yz) = 2a^2$. Надо найти $\max V = \max(xyz)$ при условии $xy + xz + yz = a^2 = \text{const}$, но $\max V$ реализуется при $\max V^2 = \max(xyz)^2 = \max[(xy)(xz)(yz)]$ и условии, что $xy + xz + yz = a^2$. Тогда есть система

$$\begin{cases} \max[(xy)(xz)(yz)] = ? \\ xy + xz + yz = a^2 \end{cases}$$

По теореме о средних (арифметическом и геометрическом) для трех чисел

$$\max V^2 = \max(xyz)^2 = \max[(xy)(xz)(yz)] \text{ достигается при условии } xy = xz = yz = \frac{a^2}{3}$$

$$x = y = z = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Однако свернуть такой кубик можно только при условии, что исходный лист жести имеет форму развертки куба в виде «креста» 4x3 или буквы Т.

Если $h = x$ – высота открытой коробки, то площадь дна (см. рисунок)

вычисляется по формуле $S = (b - 2x)(c - 2x) = 4x^2 - 2(b + c)x + bc$.

Следовательно, ее объем $V = S \cdot h = x[4x^2 - 2(b + c)x + bc]$,

а необходимое условие $\max V$ получается из производной

$$V' = \frac{dV}{dx} = 12x^2 - 4(b + c)x + bc = 0 \quad (1)$$

Критические точки получаем из уравнения (1):

$$x_{1,2} = \frac{b+c \pm \sqrt{b^2+c^2-bc}}{6} \text{ и, обосновав выбор знака,}$$

при $h = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2-bc}}{6}$ будет $\max V$ открытой коробки.

Длины ребер h , $b-2h$, $c-2h$.

Если периметр исходного листа жести $2(b + c) = \text{const}$, тогда

$$h = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2-bc}}{6} \leq \frac{b+c-\sqrt{bc}}{6} = \frac{b}{6}.$$

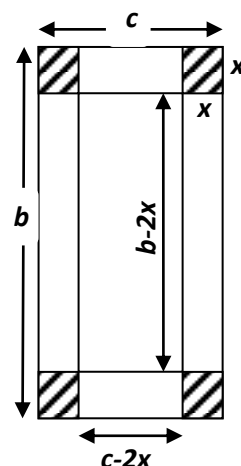
Последний переход справедлив по теореме о средних:

$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq \sqrt{bc} \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc, \text{ причем знак } \Leftrightarrow \text{ при } b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c.$$

Следовательно, получаем длины ребер коробки:

$$\begin{cases} h = \frac{b}{6} \\ b - 2h = \frac{2b}{3} \Leftrightarrow V_{\max} = \frac{2b^3}{27} \\ c - 2h = \frac{2b}{3} \end{cases}$$

Ответ: 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 2) $h = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2-bc}}{6}$; $b-2h$; $c-2h$; $V_{\max} = \frac{2b^3}{27}$.



4. (10 баллов) При каких значениях параметра a (в сантиметрах) геометрическое место точек координатной плоскости (x, y) , удовлетворяющие уравнению $(|x - 2a| + |x + 2a| + |2y - a| + |2y + a|)\text{см} = a^2 - 7\text{см}^2$, содержит ромб максимальной площади?

Может ли площадь S этого ромба быть больше 100см^2 ? Если это возможно, то указать длины диагоналей такого ромба; если нет – обосновать ответ.

Решение.

Исходное уравнение четно по переменным x и y и параметру $a \Rightarrow$ искомое ГМТ симметрично относительно осей x, y и можно считать $a > 0$.

В области, задаваемой системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2a \\ 0 \leq y \leq \frac{a}{2} \end{cases} \text{ исходное уравнение равносильно } a^2 - 6a - 7 = 0, a_{1,2} = -1 \vee 7.$$

Следовательно, необходимые условия для параметра $a = \pm 1; \pm 7$.

Однако, пара $a = \pm 1$ при подстановке в исходные уравнения дает $x, y \in \emptyset$.

В других трех областях первой четверти ГМТ не может содержать произвольную фигуру с площадью $S > 0$.

При $a=7$ получаем общее ГМТ в виде прямоугольника с размером 28 по оси Ox и 7 по оси Oy , в который можно вписать ромб. Площадь этого ромба с диагоналями $d_1 = 28, d_2 = 7$ по координатным осям вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 = 98\text{см}^2.$$

Если большую диагональ ромба $d_1 = 28$ развернуть и растянуть по диагонали прямоугольника до $d_1^* = 7\sqrt{17}$ (при этом повернется и меньшая диагональ $d_2 = 7$, но ее можно и не растягивать!),

$$\text{то у такого ромба } S^* = \frac{1}{2} d_1^* d_2 = \frac{49\sqrt{17}}{2} > 101 \text{ см}^2.$$

Т.к. исходное уравнение четно по a , ответом будет и $a = -7$.

Ответ: $a = \pm 7$ см; может $d = 7\sqrt{17}$ и 7.

5. (7 баллов) Найти любой многочлен третьей степени вида $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, для которого при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$\left| P_3(x) - \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} \right| < \frac{1}{75}$$

Решение.

$$S(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \dots$$

Это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $a_1 = 1$ и знаменателем $q = \frac{x}{2} \in (0; \frac{1}{4}]$.

Поэтому

$$\begin{aligned} xS(x) &= \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \dots \right) = \\ &= \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^4}{8(1 - \frac{x}{2})} \end{aligned}$$

Если в $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ принять значения

$a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $d = 0$, то

$$\left| P_3(x) - \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} \right| = |P_3(x) - xS(x)| = \frac{x^4}{8(1 - \frac{x}{2})} \leq \frac{1}{3 \cdot 2^5} = \frac{1}{96} < \frac{1}{75}$$

Ответ: $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $d = 0$

6. (7 баллов) Радиолокационная станция (РЛС) при круговом обзоре обнаружила неопознанный летающий объект (НЛО), неподвижно зависший над горизонтом и задаваемый на карте местности множеством $25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 \leq 0$. Найти крайние азимуты НЛО, т.е. внутри какого угла с вершиной в начале координат (место положение РЛС) находится этот объект, дающий засветку на экранах кругового обзора. Оценить $\min R$ – минимальное расстояние НЛО от РЛС. Может ли R быть меньше 0,5 условных единиц длины?

Решение.

НЛО, задаваемое на карте неравенством $25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 \leq 0$, (1) находится в какой то одной четверти, т.к. не пересекается с осями координат.

При $x = 0$ из (1) получаем $y^2 + 2y + 3 > 0$ для любых y .

При $y = 0$ из (1) получаем $25x^2 + 16x + 3 > 0$, $x \in \mathbf{R}$.

Кратчайшие азимуты находятся из системы

$$\begin{cases} 25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 = 0 \\ y = kx \end{cases} \quad (2)$$

когда она имеет единственное решение:

$$(k^2 + k + 25)x^2 + 2(k + 8)x + 3 = 0 \quad (3)$$

$$D = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 13k + 11 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{13 \pm 9}{4} = 1 \vee \frac{11}{2}$$

Тогда НЛО, очевидно, не может находиться во второй и четвертой четвертях, т.к. при $x \geq 0$, $y \geq 0$ не выполняется неравенство (1).

Следовательно НЛО находится в третьей четверти между углами (крайними азимутами)

$$\alpha_1 = \pi + \arctg \frac{11}{2}$$

$$\alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$$

Следовательно, из начала координат НЛО виден под углом

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \arctg \frac{11}{2} - \arctg \frac{\pi}{4}$$

При $k=1$ уравнение (3) эквивалентно $27x^2 + 18x + 3 = 0$, $x = -\frac{1}{3}$.

Тогда $y = kx = -\frac{1}{3}$.

$$\text{Поэтому } \min R \leq \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47 < 0.5$$

Другие оценки $\min R$ (например, при $k=2$ или $k=3$) будут хуже.

7. (6 баллов) Тройки чисел x, y, z и a, b, c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 12x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 20 \\ 9a^2 + b^2 + 3c^2 = 25 \end{cases}$$

В каких пределах может изменяться выражение $2cx - 2ay + bz$?

Решение:

Если рассматривать уравнение системы на языке векторной алгебры, то выражение $12x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 20$ соответствует

$$\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{12x^2 + 4y^2 + 9z^2} = 2\sqrt{5} \\ \vec{u} = \{2\sqrt{3}x; 2y; 3z\} \end{cases}$$

Выражение $9a^2 + b^2 + 3c^2 = 25$ соответствует

$$\begin{cases} |\vec{v}| = \sqrt{9a^2 + b^2 + 3c^2} = 5 \\ \vec{v} = \{\sqrt{3}c; -3a; b\} \end{cases}$$

А тогда скалярное произведение векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ равно $(\vec{u} \cdot \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \varphi = 6cx - 6ay + 3bz = 3(2cx - 2ay + bz)$

Так как $\cos \varphi \in [-1, 1]$, то $2cx - 2ay + bz = \frac{1}{3}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \frac{10}{3} \sqrt{5} \cos \varphi$.

Ответ: $[-\frac{10}{3} \sqrt{5}; \frac{10}{3} \sqrt{5}]$