Понедељак, 11. јул 2016

1. задатак. У троуглу BCF угао у темену B је прав. Нека је A тачка на правој CF таква да је $FA = FB$, при чему је тачка F између тачака A и C. Тачка D је таква да је $DA = DC$ и права AC полови угао DAB, а тачка E таква да је $EA = ED$ и права AD полови угао EAC. Нека је M средиште дужи CF, а X тачка таква да је четвороугао $AMXE$ паралелограм ($AM \parallel EX$ и $AE \parallel MX$). Доказати да се праве BD, FX и ME секу у једној тачки.

2. задатак. Наћи све природне бројеве n за које је могуће у свако поље таблице $n \times n$ уписати једно од слова I, M и O тако да су задовољени следећи услови:

- у свакој врсти и свакој колони, једна трећина уписаних слова су I, трећина су M и трећина су O;
- у свакој дијагонали у којој је број уписаних слова дељив са три, једну трећину чине слова I, трећину чине слова M и трећину слова O.

Напомена. Врсте и колоне таблице $n \times n$ су означене бројевима од 1 до n на уобичајен начин. Тада сваком пољу одговара пар природних бројева (i, j) са $1 \leqslant i, j \leqslant n$. За $n > 1$, таблица има $4n - 2$ *дијагонале* два типа. Дијагонала првог типа се састоји од свих поља (i, j) за која је $i + j$ константно, док се дијагонала другог типа састоји од свих поља (i, j) за која је $i - j$ константно.

3. задатак. Дат је конвексан многоугао $P = A_1A_2 \ldots A_k$ у равни. Темена A_1, A_2, ..., A_k имају целобројне координате и леже на истој кружници. Нека је S површина многоугла P. Непаран природан број n је такав да су квадрати дужина свих страница многоугла P природни бројеви дељиви са n. Доказати да је $2S$ цео број дељив са n.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Уторак, 12. јул 2016.

4. задатак. Скуп природних бројева зовемо *мирисним* ако садржи бар два елемента и сваки његов елемент има заједнички прост делилац са бар једним од преосталих. Означимо $P(n) = n^2 + n + 1$. Која је најмања могућа вредност природног броја b за коју постоји ненегативан цео број a такав да је скуп

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

мирисан?

5. задатак. На табли је написана једначина

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

са по 2016 линеарних фактора на свакој страни. Која је најмања вредност k за коју је могуће обрисати тачно k од ова 4032 линеарна фактора тако да на свакој страни остане бар један фактор и да притом добијена једначина нема реалних решења?

6. задатак. У равни је дато $n \geqslant 2$ дужи тако да се сваке две дужи секу у унутрашњој тачки и никоје три се не секу у истој тачки. Ђура треба да одабере по један крај сваке дужи и у њега постави жабу окренуту према другом крају дужи. Он ће потом пљеснути рукама $n-1$ пута. Сваки пут кад пљесне, свака жаба одмах скаче напред у следећу пресечну тачку на својој дужи. Жабе никад не мењају смер у коме скачу. Ђура жели да постави жабе тако да се ни у ком тренутку две жабе не нађу у истој пресечној тачки.

(а) Ако је n непарно, доказати да Ђура увек може да постигне свој циљ.

(б) Ако је n парно, доказати да Ђура никад не може да постигне циљ.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена