Прва међународна олимпијада метропола

Математика · Први дан (6.9.2016.)

1. задатак. Наћи све природне бројеве n за које постоји n узастопних природних бројева чији је збир потпун квадрат.

2. задатак. Нека су $a_1, \ldots, a_n$ природни бројеви који задовољавају неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Влада државе Оптимистике сваке године објављује *годишњи извештај* са n економских параметара. За $i = 1, \ldots, n$, Могуће вредности i-тог параметра су $1, 2, \ldots, a_i$. За годишњи извештај се каже да је *оптимистичан* ако су вредности бар $n-1$ параметара веће него у прошлогодишњем извештају.

Доказати да влада може вечно да објављује оптимистичне годишње извештаје.

3. задатак. Конвексан многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ је уписан у круг чији је центар строго унутар многоугла. Нека су B_1, B_2, $\ldots$, B_n редом произвољне тачке на страницама A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1, различите од темена многоугла. Доказати да важи

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_3} + \frac{B_2B_3}{A_2A_4} + \ldots + \frac{B_nB_1}{A_nA_2} > 1\,.$$

Прва међународна олимпијада метропола

Математика · Други дан (7.9.2016.)

4. задатак. У конвексном четвороуглу $ABCD$ углови код темена A и C су прави. Тачка E на продужетку странице AD иза темена D је таква да је $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ADC$. Тачка K је симетрична тачки C у односу на тачку A. Доказати да је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AKE$.

5. задатак. Нека је $r(x)$ полином непарног степена са реалним коефицијентима. Доказати да постоји само коначно много парова полинома $p(x)$ и $q(x)$ са реалним коефицијентима таквих да важи

$$(p(x))^3 + q(x^2) = r(x).$$

6. задатак. У земљи са n градова, неки градови су повезани једносмерним летовима којима управљају две компаније A и B, при чему између два града у сваком смеру може да постоји више летова. За AB-реч w кажемо да је *изводљива* ако постоји низ повезаних летова чија имена компанија чине реч w. Ако је свака AB-реч дужине 2^n изводљива, доказати да је свака коначна AB-реч такође изводљива. (AB-реч дужине k је било који низ k слова из скупа $\{A, B\}$; нпр. $AABA$ је реч дужине 4.)