33. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Тирана, Албанија – 7. мај 2016.

1. Наћи све инјективне функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да за сваки реалан број x и природан број n важи

$$\left|\sum_{i=1}^{n} i\big(f(x+i+1)-f(f(x+i))\big)\right| < 2016.$$

(Македонија)

2. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао у коме је $AB < CD$. Дијагонале AC и BD се секу у тачки F, а праве AD и BC се секу у тачки E. Нека су K и L редом подножја нормала из тачке F на праве AD и BC, а M, S и T редом средишта дужи EF, CF и DF. Доказати да друга заједничка тачка описаних кругова MKT и MLS лежи на дужи CD. *(Грчка)*

3. Одредити све моничне полиноме f са целим коефицијентима који имају следеће својство: постоји природан број N такав да је $2(f(p)!)+1$ дељиво са p за сваки прост број $p>N$ за који је $f(p)$ природан број.

Напомена: Моничан полином је полином са водећим коефицијентом 1. *(Грчка)*

4. Раван је подељена на јединичне квадрате помоћу два скупа паралелних правих који чине бесконачну решетку. Сваки јединични квадрат је обојен једном од 1201 тако да ниједан правоугаоник са обимом једнаким 100 не садржи два јединична квадрата исте боје. Доказати да ниједан правоугаоник димензија 1×1201 (или 1201×1) не садржи два квадрата исте боје.

Напомена: Претпоставља се да странице свих посматраних правоугаоника леже на решетци. *(Бугарска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

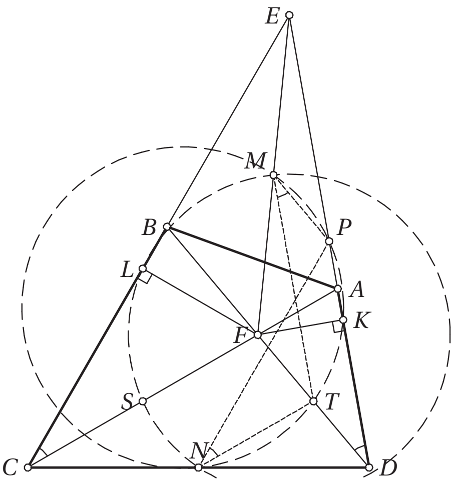
РЕШЕЊА

1. Означимо $S(x,n)=\sum_{i=1}^{n} i\{f(x+i+1)-f(f(x+i))\}$. Фиксирајмо $x\in\mathbb{R}$. Из неједнакости $|S(x-n,n)|<2016$ и $|S(x-n,n-1)|<2016$ добијамо

$$n\cdot|f(x+1)-f(f(x))|=|S(x-n,n)-S(x-n,n-1)|<4032 \quad \text{за свако } n.$$

Ово је могуће само ако је $f(f(x))=f(x+1)$, па је због инјективности $f(x)=x+1$.

2. Показаћемо да описани кругови троуглова MKT и MLS пролазе кроз средиште N дужи CD.



Круг MKT је Ојлеров круг троугла DEF, па он такође пролази кроз средиште P дужи DE. Како је $PN \parallel EC$, $MT \parallel ED$, $MP \parallel BD$ и $TN \parallel AC$, у оријентисаним угловима важи $\sphericalangle PMT = \sphericalangle BDA = \sphericalangle BCF = \sphericalangle PNT$, па N лежи на кругу $MKPT$. Аналогно, N лежи и на кругу MLS.

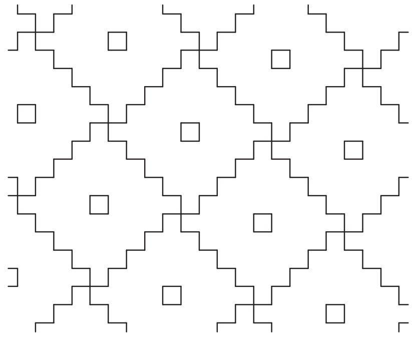
Напомена. У случају када је CD пречник описаног круга четвороугла $ABCD$, кругови MKT и MLS се поклапају.

3. Јасно је да полином f није константан. С друге стране, из услова задатка следи да $p\nmid f(p)!$, тј. $f(p)<p$ за све $p>N$, па мора бити $\deg f=1$, одакле је $f(x)=x-c$ за неко $c\in\mathbb{N}$. Како је по Вилсоновој теореми

$$2(p-c)!\equiv -1\equiv (p-1)!\equiv (-1)^{c-1}(c-1)!(p-c)! \pmod p$$

за сваки прост број $p>N$, следи да је $(-1)^{c-1}(c-1)!\equiv 2 \pmod p$, тј. $(-1)^{c-1}(c-1)!=2$, одакле је $c=3$. Према томе, $f(x)=x-3$.

4. Сматраћемо да су центри поља (тј. јединичних квадрата) тачке са целобројним координатама. *Дијамантом* са центром (a,b) зовемо скуп свих поља са центрима (x,y) за које је $|x-a|+|y-b|\leqslant 24$. Свака два поља истог дијаманта припадају једном правоугаонику обима 100. Пошто се дијамант састоји од $24^2+25^2=1201$ поља, међу њима се мора појавити свих 1201 боја.



Фиксирајмо једну боју, рецимо плаву. Приметимо да свако поље A припада бар једном дијаманту са центром у плавом пољу - заиста, дијамант са центром A садржи једно плаво поље, рецимо B, а тада A припада дијаманту са центром B. С друге стране, ако нека два дијаманта са центрима у плавим пољима B и C имају заједничко поље A, онда оба поља B и C припадају дијаманту са центром A, што је немогуће. Према томе, дијаманти са плавим центрима покривају свако поље тачно једном.

Лако се види да је поплочавање дијамантима јединствено до на симетрију (на слици је приказано аналогно поплочавање мањим дијамантима). Без смањења општости, центри тих дијаманата су тачке (x,y) за које $1201 \mid 24x-25y$. Како за свако $x \in \mathbb{Z}$ постоји тачно једно овакво y по модулу 1201, тврђење следи.