36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 12.10.2014.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени	задаци	
3	1.	Да ли је могуће саставити правоугаони рам од 99 дашчица дужина 1, 2, ..., 99?
	2.	Да ли постоји десет међусобно различитих природних бројева таквих да је њихова аритметичка средина
2	a)	њихов највећи заједнички делилац помножен са 6;
2	b)	њихов највећи заједнички делилац помножен са 5?
5	3.	На страницама AB и BC квадрата $ABCD$ уочене су тачке K и L, редом, тако да је $KB = LC$. Нека је P тачка пресека дужи AL и CK. Доказати да су дужи DP и KL међусобно нормалне.
5	4.	Током школске године, Андрија је бележио своје оцене из математике (које могу бити 2, 3, 4, или 5). Нову оцену коју треба да убележи назива "неочекивана" ако се у дотадашњем списку оцена, та оцена појављивала мање пута од било које друге *могуће* оцене. (На пример, ако је забележио редом оцене: 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, неочекиване оцене су биле оне када је први пут добио 5 и када је по други пут добио 4). Испоставило се да је на крају године Андрија имао 40 оцена, при чему се свака могућа оцена појавила тачно 10 пута (у непознатом редоследу). Да ли је могуће одредити тачан број неочекиваних оцена које је Андрија добио?
	5.	Дато је $N > 1$ правоуглих троуглова. У сваком од датих троуглова Адам је изабрао по једну катету и сабрао њихове дужине. Затим је сабрао дужине преосталих катета тих троуглова. На крају је сабрао дужине свих хипотенуза. Испоставило се да добијена три броја чине дужине страница правоуглог троугла. Доказати да је однос дужина катета у сваком од N датих троуглова константан, ако је
2	a)	$N = 2$;
3	b)	N је произвољан природан број.

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 12.10.2014.
Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)
Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

---

points problems

1. Да ли постоји десет међусобно различитих природних бројева таквих да је њихова аритметичка средина

1 a) њихов највећи заједнички делилац помножен са 6;

2 b) њихов највећи заједнички делилац помножен са 5?

4 2. Темена троугла означена су са A, B и C у смеру кретања казаљки на часовнику, а одговарајући углови са α, β и γ. Троугао се ротира увек у смеру кретања казаљки на часовнику и то: око тачке A за угао α, затим око тачке B за угао β, затим око тачке C за угао γ, па поново око тачке A, итд. (ротација се увек врши у односу на тренутни положај темена). Доказати да се након шест оваквих ротација троугао враћа на почетну позицију.

5 3. Дато је 15 међусобно различитих целих бројева. Петар је записао све могуће суме од по седам бројева, док је Васа записао све могуће суме од по осам бројева. Да ли је могуће да су Петар и Васа записали исту колекцију бројева? (Сваки број који је записао Петар мора бити записан тачно толико пута и до стране Васе и обрнуто.)

5 4. Дато је N правоуглих троуглова. У сваком од датих троуглова Адам је изабрао по једну катету и сабрао њихове дужине. Затим је сабрао дужине преосталих катета тих троуглова. На крају је сабрао дужине свих хипотенуза. Испоставило се да добијена три броја чине дужине страница правоуглог троугла. Доказати да су почетни троуглови међусобно слични.

5 5. На почетку се на столу налази гомила сребрних новчића и два празна списка. У сваком кораку могуће је или додати златни новчић и забележити тренутни број сребрних новчића на првом списку, или уклонити један сребрни новчић и забележити тренутни број златних новчића на другом списку. Након неколико корака, на столу су остали само златни новчићи. Доказати да су у том тренутку суме бројева на првом и другом списку биле једнаке.

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 26.10.2014.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени	задаци	
4	1.	Квадратна табла подељена је на $n \times n$ поља. У половини поља уписан је знак $+$, а у другој половини знак $-$. Доказати да постоје две врсте или две колоне у којима је уписан једнак број плусева.
5	2.	Доказати да сваки тангентни многоугао садржи три странице од којих је могуће саставити троугао.
6	3.	Да ли је могуће поделити све позитивне делиоце броја 100! (укључујући 1 и 100!) у два скупа са једнаким бројем елемената, таква да је производ елемената у првом скупу једнак производу елемената у другом скупу.
7	4.	На кружној стази налази се 25 полицијских станица и у свакој од њих по један полицајац. Сваки полицајац носи значку, а свих 25 значки су нумерисане бројевима $1, 2, ..., 25$, у неком редоследу. У једном тренутку полицајцима је наређено да се прераспореде по полицијским станицама тако да бројеви њихових значки иду редом по кружној стази: $1, 2, ..., 25$ у смеру кретања казаљки на сату. Полицајци су то извели тако да је укупна сума пређених путева свих полицајаца била минимална могућа. Доказати да је барем један полицајац остао у станици у којој је и био.
8	5.	У правоуглом троуглу конструисана су два подударна круга који се међусобно додирују и сваки од њих додирује хипотенузу и једну катету. Нека су M и N додирне тачке кругова и хипотенузе. Доказати да средина дужи MN припада симетрали правог угла овог троугла.
8	6.	Природан број називамо *равним* ако су му све цифре једнаке (рецимо, 4, 111, 999999). Доказати да се сваки n-тоцифрени број може представити као сума не више од $n+1$ равних бројева.
	7.	Паукова мрежа изгледа као табла са 100×100 чворова (односно 99×99 поља). У ову мрежу ухватило се 100 мува, у 100 различитих чворова. Паук, који се на почетку налази у угаоном чвору, креће се по мрежи прелазећи стално у суседни чвор, памтећи колико је корака направио и једући муве успут. Да ли паук може да поједе све муве у не више од
5	a)	2100 потеза;
5	b)	2000 потеза?

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 26.10.2014.
Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)
Израда задатака траје 5 сати
Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени	задаци
4	1. Доказати да сваки тангентни многоугао садржи три странице од којих је могуће саставити троугао.
6	2. На кружној стази налази се 25 полицијских станица и у свакој од њих по један полицајац. Сваки полицајац носи значку, а свих 25 значки су нумерисане бројевима $1, 2, ..., 25$, у неком редоследу. У једном тренутку полицајцима је наређено да се прераспореде по полицијским станицама тако да бројеви њихових значки иду редом по кружној стази: $1, 2, ..., 25$ у смеру кретања казаљки на сату. Полицајци су то извели тако да је укупна сума пређених путева свих полицајаца била минимална могућа. Доказати да је барем један полицајац остао у станици у којој је и био.
6	3. Гриша је записао 100 бројева на табли и израчунао њихов производ. Затим је увећао сваки број за 1 и приметио да је производ свих бројева остао непромењен. Затим је нове бројеве увећао за 1 и производ је поново остао непромењен, итд. Поновио је ово k пута и сваки пут је производ бројева остао непромењен. Одредити највећу могућу вредност броја k.
7	4. Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA и AB редом у A', B' и C'. Дужи AA', BB' и CC' имају заједничку тачку G. Нека су тачке C_A и C_B пресечне тачке круга описаног око $\triangle GA'B'$ са правама AC и BC, различите од B' и A'. Аналогно дефинишемо и тачке A_B, A_C, B_C, B_A. Доказати да тачке $C_A, C_B, A_B, A_C, B_C, B_A$ припадају истом кругу.
7	5. Петар је пребројао све могуће речи састављене од m слова из скупа {Г, Р, А, Д}, које садрже једнак број слова Г и Р. Васа је пребројао све могуће речи састављене од $2m$ слова из скупа {Г, Р} које садрже једнак број слова Г и Р. Ко је добио већи број?
8	6. Несташни Коља има троугао састављен од жице чији су углови $x^\circ, y^\circ, z^\circ$. Сваку страницу овог троугла он је савио за 1 степен и на тај начин добио неконвексан шестоугао са угловима $(x-1)^\circ$, 181°, $(y-1)^\circ$, 181°, $(z-1)^\circ$, 181°. Доказати да тачке савијања деле странице почетног троугла у истом односу.
10	7. У једном краљевству однос вредности злата и платине одређује се помоћу два природна броја g и p на следећи начин: x грама злата вреде колико и y грама платине ако је $xg = yp$ (x и y не морају бити цели бројеви). Оног дана када је курс био $g = p = 1001$, Ризничари су најавили да ће се сваког наредног дана смањивати за 1 или g или p, тако да ће након 2000 дана и g и p бити једнаки јединици. Није познато којим редоследом ће се смањивати g и p. Банкар је на дан најаве поседовао један килограм злата и један килограм платине. Он жели да у наредним данима врши замену злата за платину и обрнуто (по важећем курсу у дану размене), тако да на крају заврши са барем два килограма злата и барем два килограма платине. Да ли он сигурно ово може да постигне?