Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

9. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. март 2015.

Први дан

1. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Тачке M, N, P и Q су средишта страница DA, AB, BC и CD, редом, а тачка E је пресек дијагонала AC и BD. Кружнице описане око $\triangle EMN$ и $\triangle EPQ$ секу се у тачки $F \neq E$. Доказати да важи $EF \perp AC$. *(Душан Ђукић)*

2. Нека је k природан број. За $n \in \mathbb{N}$ означимо са $f_k(n)$ најмањи природан број већи од kn такав да је $nf_k(n)$ потпун квадрат природног броја. Ако је испуњено $f_k(m) = f_k(n)$, доказати да важи $m = n$. *(Никола Петровић)*

3. Стражар предлаже затвореницима следећу игру. Сви ће бити изведени у двориште, где ће свакоме од њих бити стављен на главу шешир у једној од 5 могућих боја. Стражар ће их потом поређати у врсту тако да сваки затвореник види све шешире осим сопственог и питати првог затвореника у врсти да ли зна боју свог шешира. Затвореник гласно одговара “да” или “не”. Ако одговори “не”, биће одмах закључан у самицу. Ако одговори “да”, стражар ће га питати које је боје његов шешир, на шта затвореник треба да одговори на такав начин да остали затвореници не чују одговор. Уколико је одговор погрешан, тај затвореник биће одмах закључан у самицу пред свима, а ако је одговор тачан, тај затвореник биће одмах ослобођен пред свима. Стражар потом прилази следећем затворенику у реду и понавља исти поступак, и тако све до последњег затвореника. Затвореници имају могућност да осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква комуникација међу затвореницима није дозвољена. Ако у затвору има 2015 затвореника, који је максималан број затвореника који ће загарантовано бити ослобођени уколико затвореници примењују оптималну стратегију? *(Бојан Башић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

9. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. март 2015.

Други дан

4. За цео број a, $a \neq 0$, означимо са $v_2(a)$ највећи ненегативан цео број k такав да $2^k \mid a$. За дато $n \in \mathbb{N}$ одредити највећу могућу кардиналност подскупа A скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ са следећим својством:

за све $x, y \in A$, $x \neq y$, број $v_2(x-y)$ је паран.

(Душан Ђукић)

5. Доказати неједнакост

$$\frac{x-y}{xy+2y+1} + \frac{y-z}{yz+2z+1} + \frac{z-x}{zx+2x+1} \geqslant 0,$$

где су x, y и z ненегативни реални бројеви. *(Душан Ђукић)*

6. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

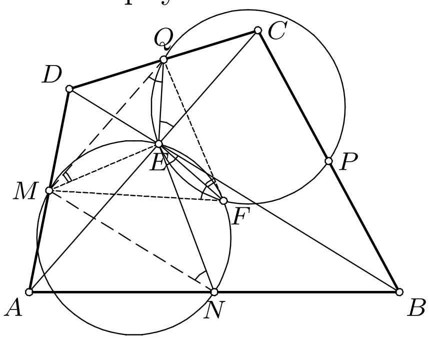
$$(2^{2015}+1)^x + 2^{2015} = 2^y + 1.$$

(Бојан Башић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. Троуглови EAB и EDC су слични, па су то и троуглови EBN и ECQ. Зато у оријентисаним угловима важи $\sphericalangle MFE = \sphericalangle MNE = \sphericalangle BEN = \sphericalangle QEC = \sphericalangle EQM$. Аналогно важи $\sphericalangle QFE = \sphericalangle EMQ$, одакле следи да је F ортоцентар троугла EMQ. Дакле, $EF \perp QM \parallel AC$.



Друго решење. Посматрајмо транслацију $\mathcal{T}$ за вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Важи $\mathcal{T}(M) = Q$ и $\mathcal{T}(N) = P$; означимо $\mathcal{T}(E) = E'$. Из сличности троуглова AED и BEC следи $\triangle AEM \sim \triangle BEP$, одакле је $\sphericalangle QE'E = \sphericalangle EMQ = \sphericalangle MEA = \sphericalangle BEP = \sphericalangle QPE$, па тачка E' лежи на кругу PEQ. Према томе, транслација $\mathcal{T}$ слика круг MEN у круг PEQ, па је права која спаја њихове центре паралелна са AC, одакле следи тврђење.

2. Претпоставимо да је $f_k(m) = f_k(n) = q$. Напишимо број q у облику $q = au^2$, где су $a, u \in \mathbb{N}$ и a није дељиво ниједним потпуним квадратом већим од 1. Како је $mq = amu^2$ потпун квадрат, то је и am, па следи да је $m = av^2$ за неко $v \in \mathbb{N}$. Слично је $n = aw^2$ за неко $w \in \mathbb{N}$.

Како је $f_k(av^2) = au^2$, u је најмањи природан број већи од $v\sqrt{k}$. Аналогно, u је најмањи природан број већи од $w\sqrt{k}$, па мора да важи $|v\sqrt{k} - w\sqrt{k}| < 1$. Међутим, одавде следи $|v - w| < \frac{1}{\sqrt{k}} < 1$, па мора бити $v = w$, тј. $m = n$.

3. Доделимо бојама вредности 0,1,2,3,4 и означимо са B боју шешира другог затвореника, а са S збир боја шешира од трећег до последњег затвореника по модулу 5. Описаћемо стратегију прва два затвореника након које ће сви остали затвореници знати S, те ће, знајући боје осталих шешира, моћи да одреде своју. Овако ће за бар 2013 затвореника бити обезбеђена слобода.

Први затвореник одговара “не” ако је $S \in \{0, B, B+1\}$ или $(B, S) = (4, 1)$. На то други одговара “не” ако је $S = 0$, а у супротном каже “да” и стражару даје одговор S. На овај начин, ако чују два одговора “не”, остали знају да је $S = 0$. Ако други каже “да” и буде ослобођен, остали знају да је $S = B$, док у супротном знају да је $S = B + 1$ ако $B \neq 4$, односно $S = 1$ ако $B = 4$.

У осталим случајевима први затвореник каже “да” (небитно је шта ће бити с њим). На то други каже “да” ако $S \in \{2, 4\}$ и стражару даје одговор $S - 2$. Ако је $B = 0$, онда $S \notin \{0, 1\}$, па остали знају да је $S = 2$ ако други буде ослобођен, $S = 3$ ако каже “не”, и $S = 4$ ако каже “да” и промаши. Најзад, ако је $B \neq 0$, с обзиром на потврдан одговор првог важи $S \equiv B + 2$ или $S \equiv B + 3 \pmod 4$, а одговор другог одређује парност S, што осталима омогућује да одреде S.

Остаје да докажемо да ниједна стратегија не гарантује слободу 2014 затвореника. Претпоставимо да таква стратегија постоји и посматрајмо скуп од пет распореда који се разликују само у боји шешира другог затвореника. У највише једном од ових распореда стратегија предвиђа да први каже "не" (у супротном други не би могао да са сигурношћу одреди боју свог шешира). У бар три од преостала четири распореда први би морао да промаши, па други не би могао да одреди боју свог шешира. Овим је доказ завршен.

4. Доказаћемо индукцијом по k да скуп A садржи највише 2^k различитих елемената по модулу 2^{2k}. То тривијално важи за $k=0$. Нека је $k>0$. По индуктивној претпоставци, елементи скупа A дају највише 2^{k-1} остатака по модулу 2^{2k-2}. Претпоставимо да елементи A дају више од 2^k остатака по модулу 2^{2k}. На основу Дирихлеовог принципа, бар три од ових остатака су једнаки по модулу 2^{2k-2}. Али међу ова три остатка, два се разликују за $2^{2k-1} \pmod{2^{2k}}$, противно услову задатка.

Следи да је $|A| \leqslant 2^{[\frac{n+1}{2}]}$. Пример скупа A са $2^{[\frac{n+1}{2}]}$ елемената добијамо укључивањем бројева облика $\sum_{i\in B} 4^i$ за све подскупове B скупа $\{0,1,\ldots,[\frac{n-1}{2}]\}$.

Друго решење. Кажемо да је скуп X *срећан* ако је $v_2(x-y)$ парно за све $x,y\in X$ $(x\neq y)$, а *несрећан* ако је $v_2(x-y)$ непарно за све $x,y\in X$ $(x\neq y)$. Означимо са a_n и b_n редом максималне кардиналности срећног и несрећног подскупа скупа $T_n=\{1,2,\ldots,2^n\}$.

Посматрајмо срећан скуп $A\subset T_n$, $n\geqslant 1$. Како је $v_2(2x-2y)=v_2(x-y)+1$, скупови $A_0=\{\frac{x}{2}\mid x\in A,\ 2\mid x\}$ и $A_1=\{\frac{x-1}{2}\mid x\in A,\ 2\nmid x\}$ су несрећни подскупови скупа T_{n-1} и имају највише по b_{n-1} елемената. С друге стране, ако је $A_0\subset T_{n-1}$ несрећан скуп, скуп $\{2x,2x+1\mid x\in A_0\}\subset T_n$ је срећан и има $2|A_0|$ елемената. Следи да је $a_n=2b_{n-1}$.

Слично, ако је $B\subset T_n$ непаран скуп, сви његови елементи су исте парности, а скуп $B'=\{\lceil\frac{x}{2}\rceil\mid x\in B\}\subset T_{n-1}$ је срећан. С друге стране, ако је $B'\subset T_{n-1}$ срећан, скуп $B=\{2x-1\mid x\in B'\}\subset T_n$ је несрећан. Одавде је $b_n=a_{n-1}$.

Добијене релације дају $a_n=2a_{n-2}$ за $n\geqslant 2$, па из $a_0=1$ и $a_1=2$ једноставном индукцијом добијамо $a_n=2^{[\frac{n+1}{2}]}$.

5. Означимо $a=\frac{x-y}{xy+2y+1}$, $b=\frac{y-z}{yz+2z+1}$ и $c=\frac{z-x}{zx+2x+1}$. Тада је $1+\frac{1}{a}=\frac{xy+x+y+1}{x-y}$ и одатле $\frac{a}{a+1}=\frac{x-y}{xy+x+y+1}=\frac{1}{y+1}-\frac{1}{x+1}$; аналогно је $\frac{b}{b+1}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{y+1}$ и $\frac{c}{c+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{z+1}$.

Из $0<\frac{1}{x+1},\frac{1}{y+1},\frac{1}{z+1}<1$ следи $\frac{a}{a+1},\frac{b}{b+1},\frac{c}{c+1}<1$, па су $a+1,b+1,c+1$ позитивни. Осим тога, имамо $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=0$, тј. $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=3$. Сада је по Коши-Шварцовој неједнакости $(a+1)+(b+1)+(c+1)\geqslant 3$, тј. $a+b+c\geqslant 0$.

Друго решење. Тражена неједнакост се множењем и груписањем своди на

$$\begin{array}{ll} 2(x-1)^2(y-z)^2+2(y-1)^2(z-x)^2+2(z-1)^2(x-y)^2 & \\ +9(xy^2+yz^2+zx^2-3xyz)+3(x^2y+y^2z+z^2x-3xyz) & \geqslant 0, \end{array}$$

где су сви сабирци ненегативни на основу А-Г неједнакости.

Напомена. Ако се услов $x, y, z \geqslant 0$ замени са $x, y, z \geqslant -\varepsilon$ за произвољно $\varepsilon > 0$, тврђење више не мора да важи, што показује пример $(x, y, z) = (-\varepsilon, 1, \frac{2}{\varepsilon})$.

6. За $x \leqslant 1$ једина решења су $(0, 2015)$ и $(1, 2016)$.

Нека је $x > 1$. Како је $2^{2015}+1$ дељиво са 3, имамо $(2^{2015}+1)^x+2^{2015} \equiv 2^{2015} \equiv 5 \pmod 9$, дакле $2^y \equiv 4 \pmod 9$, одакле добијамо $y = 6k+2$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Сада по модулу 13 имамо $2^y+1 = (2^6)^k \cdot 2^2 \equiv \pm 4$ и $2^{2015} \equiv 7 \pmod{13}$, па тако добијамо $8^x + 7 \equiv \pm 4 \pmod{13}$. Међутим, 8^x даје један од остатака $1, 5, 8, 12$ по модулу 13, па је последња конгруенција немогућа.

Друго решење. За $x > 1$ имамо $2^y = (2^{2015}+1)^x + 2^{2015} - 1 = (x+1)2^{2015} + \sum_{i=2}^{x} \binom{x}{i} 2^{2015i} \equiv (x+1)2^{2015} \pmod{2^{2019}}$, па због $y > 2019$ следи да $16 \mid x+1$. Сада посматрајмо једначину по модулу 17. Како је $2^{2015} \equiv 9 \pmod{17}$, добијамо $2^y \equiv 10^x + 8 \equiv 10^{15} + 8 \equiv 3 \pmod{17}$, што је немогуће.