Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

9. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. март 2015.

Први дан

1. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Тачке M, N, P и Q су средишта страница DA, AB, BC и CD, редом, а тачка E је пресек дијагонала AC и BD. Кружнице описане око $\triangle EMN$ и $\triangle EPQ$ секу се у тачки $F \neq E$. Доказати да важи $EF \perp AC$.

2. Нека је k природан број. За $n \in \mathbb{N}$ означимо са $f_k(n)$ најмањи природан број већи од kn такав да је $nf_k(n)$ потпун квадрат природног броја. Ако је испуњено $f_k(m) = f_k(n)$, доказати да важи $m = n$.

3. Стражар предлаже затвореницима следећу игру. Сви ће бити изведени у двориште, где ће свакоме од њих бити стављен на главу шешир у једној од 5 могућих боја. Стражар ће их потом поређати у врсту тако да сваки затвореник види све шешире осим сопственог и питати првог затвореника у врсти да ли зна боју свог шешира. Затвореник гласно одговара "да" или "не". Ако одговори "не", биће одмах закључан у самицу. Ако одговори "да", стражар ће га питати које је боје његов шешир, на шта затвореник треба да одговори на такав начин да остали затвореници не чују одговор. Уколико је одговор погрешан, тај затвореник биће одмах закључан у самицу пред свима, а ако је одговор тачан, тај затвореник биће одмах ослобођен пред свима. Стражар потом прилази следећем затворенику у реду и понавља исти поступак, и тако све до последњег затвореника. Затвореници имају могућност да осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква комуникација међу затвореницима није дозвољена. Ако у затвору има 2015 затвореника, који је максималан број затвореника који ће загарантовано бити ослобођени уколико затвореници примењују оптималну стратегију?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

9. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. март 2015.

Други дан

4. За цео број a, $a \neq 0$, означимо са $v_2(a)$ највећи ненегативан цео број k такав да $2^k \mid a$. За дато $n \in \mathbb{N}$ одредити највећу могућу кардиналност подскупа A скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ са следећим својством:

за све $x, y \in A$, $x \neq y$, број $v_2(x-y)$ је паран.

5. Доказати неједнакост

$$\frac{x-y}{xy+2y+1} + \frac{y-z}{yz+2z+1} + \frac{z-x}{zx+2x+1} \geqslant 0,$$

где су x, y и z ненегативни реални бројеви.

6. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$(2^{2015}+1)^x + 2^{2015} = 2^y + 1.$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.