Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред – А категорија

1. За свако $k \in \mathbb{N}$ важи тврђење: $3 \mid k^2 \Rightarrow 3 \mid k$, тј. $3 \mid k^2 \Rightarrow 9 \mid k^2$. Ако би постојали цели бројеви m и n за које важи $(m+n+2)^2 = 3(mn+1)$, следило би $3 \mid (m+n+2)^2$, па и $9 \mid (m+n+2)^2$, тј. и $3 \mid mn+1$. Из $3 \mid mn+1$ следи да ниједан од бројева m и n не може бити дељив са 3, нити оба могу давати једнаке остатке при дељењу са 3. Дакле, један од њих даје остатак 1 при дељењу са 3, а други даје остатак 2. Запишимо $m = 3p+1$ и $n = 3q+2$ за неке p и q. Али тада имамо $m+n+2 = 3(p+q+1)+2$, што је немогуће јер $3 \mid m+n+2$.

Дакле, не постоје цели бројеви m и n такви да важи $(m+n+2)^2 = 3(mn+1)$. (Тангента 72, стр. 14, зад. М1132.)

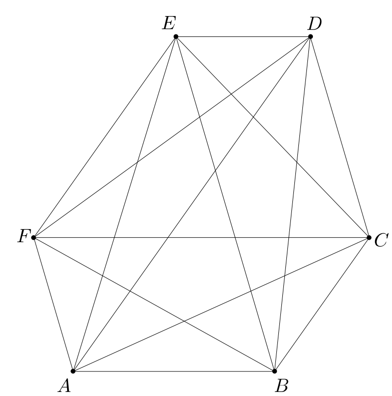
2. а) Претпоставимо да важи $x^2+y^2+z^2+w^2 = xyzw$. Тада имамо

$$(yzw-x)^2+y^2+z^2+w^2 = y^2z^2w^2 - 2xyzw + x^2+y^2+z^2+w^2 = y^2z^2w^2 - xyzw = (yzw-x)yzw.$$

b) Приметимо да је $(2,2,2,2)$ решење постављене једначине. Нека је (x,y,z,w) такво решење за које важи $2 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant w$. Одатле добијамо $yzw-x \geqslant 4w-x \geqslant 3w > w$. Према делу под а), од решења (x,y,z,w) добијамо решење $(y,z,w,yzw-x)$ (где су, у обе четворке, бројеви сортирани по величини), и добијено решење је различито од претходног будући да је $yzw-x$ веће од w. Почевши од $(2,2,2,2)$, понављањем ове процедуре добијамо бесконачно много различитих решења.

3. Нека је k број нацртаних правих. Како права a сече тачно 3 од њих, међу повученим правима постоје $k-3$ међу којима су сваке две паралелне, и међу којима се налази и права a; означимо скуп ових правих са $\mathscr{A}$. Приметимо да међу њима није ни права b ни права c (јер би у супротном и оне секле тачно 3 друге праве). Дакле, праве b и c су две од три праве које права a сече. Праве b и c нису паралелне, будући да би у том случају оне секле исти број правих, а што је у супротности с условом задатка. Нека је d преостала права коју сече права a, различита од правих b и c. Ако би права d секла обе праве b и c, тада би праве b и c секле подједнак број правих, што је немогуће. Претпоставимо $d \parallel c$. Тада права b сече укупно $k-1$ праву (све праве из класе $\mathscr{A}$, и још праве c и d), одакле имамо $k-1=4$, тј. $k=5$. Права c у том случају сече 2 праве које сачињавају класу $\mathscr{A}$, и још праву b, што је укупно 3 праве, контрадикција. Дакле, преостаје $d \parallel b$. Тада права b сече укупно $k-2$ праве, одакле имамо $k-2=4$, те добијамо решење $k=6$ (права c у том случају сече 3 праве које чине класу $\mathscr{A}$, и још праве b и c, што је укупно 5 правих, па је услов задатка испуњен). (Тангента 73, стр. 48, зад. 24.)

4. Из првог пара паралелности следи $P_{\triangle FAB} = P_{\triangle ABC}$ и $P_{\triangle CDE} = P_{\triangle DEF}$, а из другог пара $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle BCD}$ и $P_{\triangle DEF} = P_{\triangle EFA}$. Последња паралелност даје $P_{\triangle BCD} = P_{\triangle CDE}$, па сада имамо $P_{\triangle FAB} = P_{\triangle ABC} = \cdots = P_{\triangle EFA}$. Према томе, тачке E и B су на једнаком растојању од праве FA, тј. $BE \parallel FA$.



Оп 2014 1А 4

5. Прво, немогуће је да за столом нема уопште искрених људи, јер тада би изјава било ког од ових 2014 људи (лажова, дакле) била истинита, што је немогуће јер они стално причају неистину. Затим, пошто сада знамо да имамо бар једног искреног човека, онда је јасно да су сви остали, осим њега и можда његових суседа, лажови. Дакле, постоје највише 3 искрена човека за столом. Претпоставимо да постоје тачно 3 искрена човека. То би морала бити 3 узастопна човека за столом. Означимо их са A, B и C, при чему је B између A и C. Но тада би искази људи A и C били нетачни, што је у контрадикцији с претпоставком да су они искрени људи. Претпоставимо сада да је само 1 искрен човек за столом. Тада би искази његових првих суседа с леве и десне стране били истинити, али то је немогуће јер су они по претпоставци лажови, те не могу давати истините исказе. Дакле, за столом морају седети тачно 2 искрена човека. Распоред у ком ова два човека седе један до другог представља пример да је оваква ситуација заиста могућа.

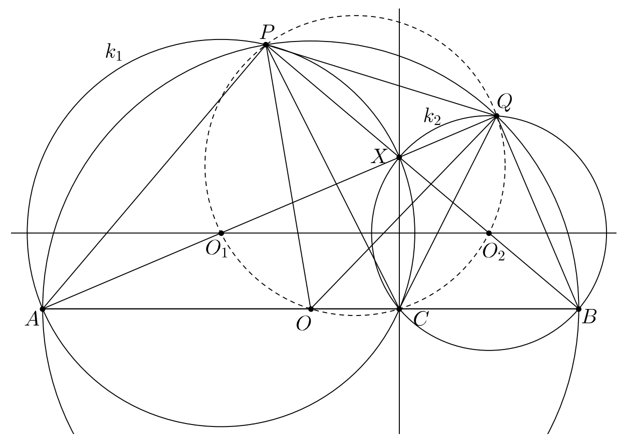
Други разред – А категорија

1. *Прво решење.* Очигледан услов је $x \geqslant 0$. Даље, због $\sqrt{3+\sqrt{x}} = 3-x$ мора важити $x \leqslant 3$. Квадрирањем последње једначине добијамо $3+\sqrt{x} = 9-6x+x^2$, тј. $\sqrt{x} = 6-6x+x^2$. Квадрирамо и ову једначину, уз услов $6-6x+x^2 \geqslant 0$, после чега добијамо $x = x^4-12x^3+48x^2-72x+36$, што се своди на $x^4-12x^3+48x^2-73x+36 = 0$. Потражимо једноставније факторе полинома на левој страни: налазимо да је дељив са $x-1$ и $x-4$, тј. добијена једначина може се записати у облику $(x-1)(x-4)(x^2-7x+9)=0$. Одатле, његове нуле су $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$ и $x_4=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$. Другу и четврту нулу одбацујемо јер не упадају у интервал $[0,3]$. Трећу нулу такође одбацујемо јер за њу важи $6-6x_3+x_3^2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}<0$. Остаје $x=1$ као једино решење полазне једначине.

Друго решење. Уочавамо да је $x=1$ једно решење постављене једначине. За $x>1$ важи $x+\sqrt{3+\sqrt{x}}>1+\sqrt{3+\sqrt{1}}=3$, а за $x<1$ важи $x+\sqrt{3+\sqrt{x}}<1+\sqrt{3+\sqrt{1}}=3$. Према томе, $x=1$ је једино решење. (Тангента 70, стр. 31, зад. II.4.)

2. Нека се посматрани број, означимо га са n, завршава са тачно k нула, где је $k\geqslant 0$. Дакле, $n=x\cdot 10^k$ за неки природан број x који се завршава цифром 2. Приметимо да је број n дељив са 5^k али не и са 5^{k+1}. Дакле, да би n био потпун квадрат, k мора бити паран број. Сада из $n=x\cdot 10^k=x\cdot(10^{\frac{k}{2}})^2$ следи да и x мора бити потпун квадрат. Уколико је број x једноцифрен (дакле, број 2), имамо одмах контрадикцију. Дакле, x има бар две цифре. Но, без обзира на то да ли је претпоследња цифра броја x једнака 0 или 2, у оба случаја добијамо да двоцифрени завршетак броја x није дељив са 4, па закључујемо да је број x дељив са 2 али не и са 4; одатле, x не може бити потпун квадрат, контрадикција. (Тангента 74, стр. 36, зад I.4.)

3. Нека су k_1 и k_2 кружнице описане око $\triangle PCA$ и $\triangle QCB$, редом. Означимо $\measuredangle PCA=\measuredangle QCB=\alpha$ и $\measuredangle PAQ=\measuredangle PBQ=\beta$. У случају да је C средиште дужи AB, тврђење је очигледно због симетрије. Иначе, нека је O други пресек кружнице описане око $\triangle PCQ$ са пречником AB. Имамо $\measuredangle OPQ=\measuredangle QCB=\measuredangle PCA=\measuredangle PQO$, те следи $OP\cong OQ$. Дакле, O се налази на симетрали дужи PQ, која једино може да сече пречник кружнице k у центру, па следи да је O центар кружнице k. Имамо $\measuredangle PCQ=\measuredangle POQ=2\measuredangle PBQ=2\beta$, те следи $180^\circ=\measuredangle ACP+\measuredangle BCQ+\measuredangle PCQ=2\alpha+2\beta$, тј. $\alpha+\beta=90^\circ$. Нека је c нормала у тачки C на AB. Нека је X пресек c и BP. Пошто имамо $\measuredangle XCA=\measuredangle XPA=90^\circ$, следи да X припада кружници k_1. Даље, пошто имамо $\measuredangle XCP=\measuredangle XAP=\beta$, следи да тачка X припада и дужи AQ. На сличан начин се сада доказује да X припада и кружници k_2, те је CX заједничка тетива две кружница k_1 и k_2. Дакле, $O_1O_2\perp CX\perp AB$, те следи $O_1O_2\parallel AB$.



Оп 2014 2А 3

4. Из услова задатка имамо $x^2+y^2=\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}\in\mathbb{Q}$; из овога и $x^2-y^2\in\mathbb{Q}$ следи $x^2,y^2\in\mathbb{Q}$. Даље, за неки ненула рационалан број q имамо $x^6=(x^3)^2=(y^3+q)^2=y^6+2qy^3+q^2$, па како $x^6,y^6\in\mathbb{Q}$ (због $x^6=(x^2)^3\in\mathbb{Q}$), из последње једнакости добијамо $y^3\in\mathbb{Q}$. Сада из $y^2\in\mathbb{Q}$ и $y^3\in\mathbb{Q}$ следи $y\in\mathbb{Q}$. Аналогно се доказује $x\in\mathbb{Q}$.

5. Означићемо са T_n минимални број телефонских разговора који је потребно обавити да би свих n домаћица сазнало свих n трачева. Лако се израчунава $T_2=1$ и $T_3=3$. Индуктивно ћемо показати да је $T_n=2n-3$. Нека је A једна од две домаћице које су обавиле последњи телефонски разговор. Она је свакако морала и пре тог последњег разговора обавити бар један да би прво предала свој трач осталима, а у последњем разговору је сазнала трачеве које није знала дотад. Преосталих $n-1$ очајних домаћица морале су међусобно обавити T_{n-1} разговора и разменити својих $n-1$ трачева (при чему ће размењивати и трач који је потекао од домаћице A); заиста, приметимо да ових $n-1$ домаћица не може убрзати своју комуникацију (тј. смањити број позива) тако што би понекад разговарали и с домаћицом A, јер позивањем домаћице A не могу сазнати више информација него што би сазнали када би позвали ону домаћицу која је претходно разговарала са A. Овим смо показали неједнакост $T_n\geqslant T_{n-1}+2=(2n-5)+2=2n-3$.

Покажимо још како се овај број може достићи. Нека први телефонски разговор буде разговор домаћице A и било које од преосталих $n-1$ домаћица. Затим преосталих $n-1$ домаћица обаве $T_{n-1}=2n-5$ разговора током којих ће међусобно разменити све сопствене трачеве, као и трач који је потекао од домаћице A. Најзад, у последњем разговору једна од тих $n-1$ домаћица разговара с домаћицом A и на тај начин и домаћица A сазна све трачеве.

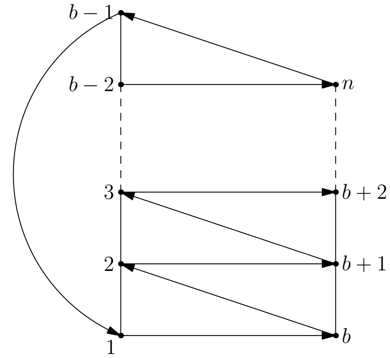
Трећи разред – А категорија

1. За $n=1$ тривијално имамо једну такву функцију. Надаље претпостављамо $n\geqslant 2$.

Нека је f једна таква функција. Приметимо да је $g=f\circ f$ бијекција. Докажимо да онда и f мора бити бијекција. Ако f не би била „1-1“, постојали би $a,b\in A$ такви да важи $f(a)=f(b)$, па и $f(f(a))=f(f(b))$, тј. $g(a)=g(b)$, што је немогуће. С друге стране, ако f не би била „на“, постојао би елемент $a\in A$ такав да не важи $f(x)=a$ ни за једно $x\in A$. Међутим тада не би важило ни $g(x)=a$ ни за једно $x\in A$, што је поново контрадикција.

Даље, можемо уочити да за свако $x \in A$ постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да важи $x = \underbrace{g(g(\dots g}_{m \text{ пута}}(1)\dots))$ (кажемо: сваки елемент $x \in A$ припада *орбити* елемента 1 за бијекцију g). Одатле следи и да сваки елемент $x \in A$ припада орбити елемента 1 за бијекцију f.

Обележимо $b = f(1)$. Из услова задатка видимо да мора важити $f(b) = g(1) = 2$. Индукцијом показујемо да за све x који испуњавају $x \leqslant n-b+1$ важи $f(x) = x+b-1$, а да за све x који испуњавају $x \geqslant b$ важи $f(x) = x-b+2$. Заиста, за базне случајеве узимамо $x = 1$ и $x = b$; затим, уколико за $x > 1$ важи $x \leqslant n-b+1$, тада индуктивни корак гласи $f(x) = f(f(x+b-2)) = g(x+b-2) = x+b-1$ (приметимо да су испуњене неједнакости $x+b-2 \geqslant 2+b-2 = b$ и $x+b-2 \leqslant n-b+1+b-2 = n-1$, што омогућава приказани рачун), а за $x > b$ слично имамо $f(x) = f(f(x-b+1)) = g(x-b+1) = x-b+2$, чиме је тврдња доказана. Специјално, $f(n) = n-b+2$, одакле следи $f(n-b+2) = f(f(n)) = g(n) = 1$. Приметимо да важи $f(n) < b$ (ако би важило $f(n) \geqslant b$, следило би $f(f(n)) = f(n)+b-1 \geqslant 2b-1$, али с друге стране имамо $f(f(n)) = g(n) = 1$). Пошто је сваки елемент $x \in A$ у орбити елемента 1 за бијекцију f, међу елементима $1, f(1), f(f(1)), \dots, n, n-b+2$ налазе се сви елементи скупа A. Но, приметимо да смо на овај начин, не рачунајући последњи елемент, излистали управо све елементе x за које важи нешто од $1 \leqslant x \leqslant n-b+1$ или $b \leqslant x \leqslant n$ (елементи из „прве групе“ и „друге групе“ јављају се наизменично), тј. укупно смо излистали (рачунајући и последњи) тачно $2(n-b+1)+1$ елемената. Одатле закључујемо $2(n-b+1)+1 = n$, тј. $n = 2b-3$.



Оп 2014 3А 1

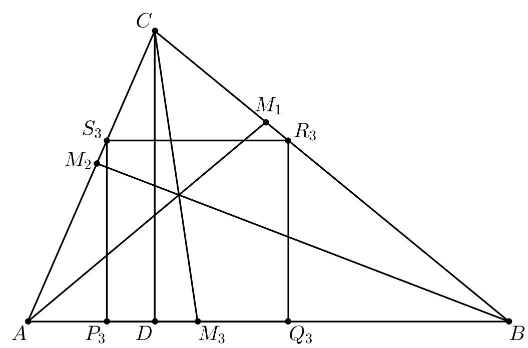
Дакле, ако је n паран број, не постоји таква функција f. Ако је n непаран број, она је једнозначно одређена горњим разматрањима, тј.

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{n+1}{2}, & \text{за } x \leqslant \dfrac{n-1}{2}; \\ x - \dfrac{n-1}{2}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Нека је D подножје висине из C на AB, $x = P_3Q_3$, $p = AD = b\cos\alpha$, $q = BD = a\cos\beta$ и $h = CD = b\sin\alpha = a\sin\beta$. Имамо $AP_3 = \frac{px}{h}$ и $BQ_3 = \frac{qx}{h}$, те важи $AM_3 = \frac{px}{h} + \frac{x}{2}$ и $M_3B = \frac{qx}{h} + \frac{x}{2}$, одакле добијамо

$$\frac{AM_3}{M_3B} = \frac{2p+h}{2q+h} = \frac{2b\cos\alpha + b\sin\alpha}{2a\cos\beta + a\sin\beta} = \frac{b}{a}\left(\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta + \sin\beta}\right).$$

Очито множење овог и аналогних израза за $\frac{BM_1}{M_1C}$ и $\frac{CM_2}{M_2A}$ даје 1, те се према Чевиној теореми праве AM_1, BM_2 и CM_3 секу у једној тачки.



Оп 2014 3А 2

3. Број 420 има наведену особину: заиста, $420 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$ и $7 < \sqrt[3]{420} < 8$. Претпоставимо да је $n > 420$ број који има наведену особину. Тада бројеви 3, 4, 5 и 7 деле n, па следи $n \geqslant 840 > 729 = 9^3$. Одатле још и бројеви 8 и 9 деле n, па следи $n \geqslant 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520 > 2197 = 13^3$. Закључујемо да још и бројеви 11 и 13 деле n, одакле добијамо $n \geqslant 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 > 6859 = 19^3$. Нека је k природан број такав да важи $19^k \leqslant \sqrt[3]{n} < 19^{k+1}$. Тада бројеви 5^k, 7^k, 9^k, 11^k, 13^k, 16^k, 17^k и 19^k деле n, што нас доводи до следеће контрадикције:

$$n \geqslant 5^k \cdot 7^k \cdot 9^k \cdot 11^k \cdot 13^k \cdot 16^k \cdot 17^k \cdot 19^k = 19^k(4\cdot 5)^k(3\cdot 7)^k(2\cdot 11)^k(2\cdot 13)^k(3\cdot 17)^k > 19^{6k} \geqslant 19^{3k+3} > n.$$

Према томе, највећи број с траженом особином је 420. (Тангента 70, стр. 12, зад. М1102.)

4. Нека су дужине страница посматраног троугла једнаке a, $a+1$ и $a+2$. Из синусне теореме и услова задатка имамо $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a+2}{\sin 2\alpha} = \frac{a+2}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, одакле добијамо $\cos\alpha = \frac{a+2}{2a}$. Сада на основу косинусне теореме можемо саставити једначину $a^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)(a+2)\frac{a+2}{2a}$, што се своди на $0 = a^2 - 3a - 4$. Решења ове једначине су $a_1 = 4$ и $a_2 = -1$. Негативно решење одбацујемо, те остаје $a = 4$, и дужине страница посматраног троугла су 4, 5 и 6. (Тангента 74, стр. 12, зад. М1177.)

5. Сваки најкраћи пут од тачке P до тачке Q мора бити састављен од померaја у неком од смерова „горе-десно“ или „доле-десно“, и обратно, сваки пут од тачке P до тачке Q састављен искључиво од таквих померaја јесте један пут од P до Q најкраће могуће дужине. Посматрајмо четири чвора на вертикалној оси симетрије мреже из поставке. Сваки пут од P до Q мора проћи кроз тачно један од њих. Посматрајмо најпре путеве који пролазе кроз најнижи од тих чворова. Путева од тачке P до тог чвора има $\binom{9}{3} = 84$ (дужина сваког таквог пута износи 9, и од тих 9 померaја тачно 3 морају бити у смеру „горе-десно“); због симетрије, од уоченог чвора до тачке Q постоје такође 84 пута, па закључујемо да тражених путева од тачке P до тачке Q који пролазе кроз уочени чвор има $84^2 = 7056$. Због симетрије, тражених путева од P до Q који пролазе кроз највиши од уочена четири чвора има такође 7056. На сличан начин израчунавамо да, за сваки од средња два чвора, тражених путева од P до Q који пролазе кроз њега има $\binom{9}{4}^2 = 126^2 = 15876$. Дакле, укупан број тражених путева износи $2 \cdot 7056 + 2 \cdot 15876 = 45864$.

Четврти разред – А категорија

1. По услову задатка имамо

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = x_2(x_2 - x_1) + x_3(x_3 - x_1) + \cdots + x_n(x_n - x_1).$$

Међутим, како важи $0 \leqslant x_i \leqslant x_1$ за $i = 2, \ldots, n$, сви сабирци $x_i(x_i - x_1)$ у горњем изразу су непозитивни. Одатле следи $x_i(x_i - x_1) = 0$, тј. за свако i имамо $x_i = x_1$ или $x_i = 0$. Ако је испуњено $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$ и $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$, онда следи $x_1 = \frac{1}{k}$, и тада су услови задатка задовољени. Према томе, могуће вредности броја x_1 су $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$.

2. Означимо са P максимални тражени производ. Јасно је да ниједан од чинилаца производа P није једнак 1. Докажимо да ниједан чинилац не би могао бити ни већи од 4. Заиста, ако би неки његов чинилац, рецимо k, био већи од 4, онда би производ који уместо k има чиниоце 2 и $k - 2$ био већи од P (због $2(k-2) > k$ за $k > 4$), а одговарајући збир би такође био 2013. Даље, сваку четворку у производу можемо заменити са две двојке (чиме се не мења ни збир ни производ), па закључујемо $P = 2^a 3^b$ за неке a и b. Најзад, како важи $2^3 < 3^2$ и $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, јасно је да двојки не може бити више од две, тј. $a \in \{0, 1, 2\}$. Будући да $3 \mid 2013$ и важи

$$2013 = 3 \cdot 671 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{2013 \text{ пута}},$$

закључујемо $P = 3^{671}$. (Тангента 72, стр. 14, зад. М1136.)

3. Поставимо квадрат $ABCD$ у координатни систем као на слици. Нека је $T(x, y)$ произвољна тачка кружнице k. Тада важи $x^2 + y^2 = a^2$. Можемо записати $\overrightarrow{TA} = (-a-x, -a-y)$, $\overrightarrow{TB} = (a-x, -a-y)$, $\overrightarrow{TC} = (a-x, a-y)$ и $\overrightarrow{TD} = (-a-x, a-y)$. Одатле лако израчунавамо

$$\cos^2 \alpha_T = \left(\frac{(-a-x, -a-y)}{\sqrt{(-a-x)^2 + (-a-y)^2}} \cdot \frac{(a-x, a-y)}{\sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}} \right)^2 = \frac{a^2}{5a^2 - 8xy},$$

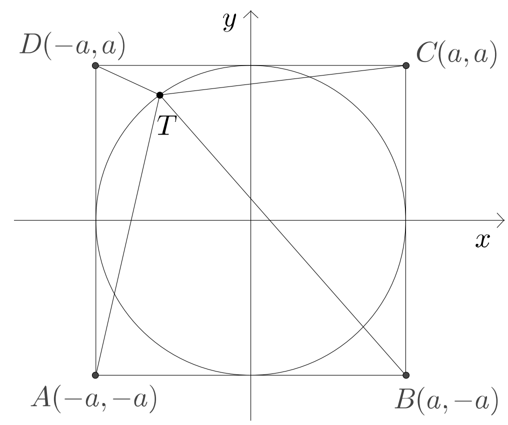
затим

$$\cos^2 \beta_T = \left(\frac{(a-x, -a-y)}{\sqrt{(a-x)^2 + (-a-y)^2}} \cdot \frac{(-a-x, a-y)}{\sqrt{(-a-x)^2 + (a-y)^2}} \right)^2 = \frac{a^2}{5a^2 + 8xy},$$

и најзад

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_T + \operatorname{tg}^2 \beta_T = \frac{1}{\cos^2 \alpha_T} + \frac{1}{\cos^2 \beta_T} - 2 = \frac{5a^2 - 8xy}{a^2} + \frac{5a^2 + 8xy}{a^2} - 2 = 8.$$

(Тангента 71, стр. 16, зад. М1110.)



Оп 2014 4А 3

4. Како је a_n једнако цифри јединица броја $2^0 a_0 + 2^1 a_1 + \cdots + 2^{n-1} a_{n-1}$, закључујемо да је a_{n+1} заправо цифра јединица броја $a_n + 2^n a_n = (2^n + 1)a_n$, а то је цифра јединица производа цифара јединица бројева $2^n + 1$ и a_n. Обележимо са b_n цифру јединица броја $2^n + 1$. У низу уређених парова $\{(b_n, a_n) : n \geqslant 0\}$ мора доћи до понављања, јер $a_n, b_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Међутим, ако је $n < k$, $b_n = b_k$ и $a_n = a_k$, мора бити и $b_{n+1} = b_{k+1}$ и $a_{n+1} = a_{k+1}$, те добијамо да је $(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_k)$ један период датог низа.

5. Докажимо најпре следећу лему.

Лема. Нека је L_n број подскупова скупа $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ у којима се не налазе два узастопна природна броја, као ни бројеви 1 и n истовремено. Тада је $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ и $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ за $n \geqslant 3$.

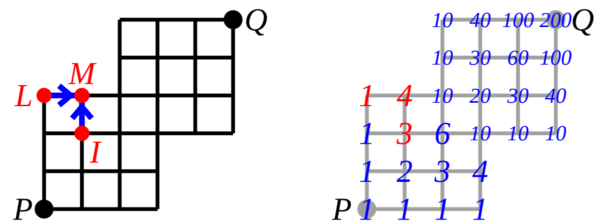
Доказ. За $n = 1$ једини скуп с траженом особином је $\varnothing$, а за $n = 2$ једина три таква скупа су $\varnothing$, $\{1\}$ и $\{2\}$. Нека је сада $n \geqslant 3$. Посматрајмо подскупове скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који задовољавају услов леме. За сваки такав подскуп, његов пресек са скупом $\{1, n-1, n\}$ може бити само нешто од следећег: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{n-1\}$, $\{n\}$ или $\{1, n-1\}$. Они посматрани подскупови код којих је такав пресек једна од прве три наведене могућности могу се другим речима описати управо као подскупови скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ у којима се не налазе два узастопна природна броја, као ни бројеви 1 и $n-1$ истовремено, а таквих има L_{n-1}. Размотримо сада посматране подскупове који у пресеку са скупом $\{1, n-1, n\}$ дају $\{n\}$ или $\{1, n-1\}$. Тврдимо да таквих има L_{n-2}. Успоставићемо бијекцију између њих и подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ у којима се не налазе два узастопна природна броја, као ни бројеви 1 и $n-2$ истовремено. Заиста, ако посматрамо подскуп који у пресеку са $\{1, n-1, n\}$ даје $\{n\}$, тада уклањањем елемента n добијамо један задовољавајућ подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ (који, приметимо, не садржи елемент 1); ако посматрамо подскуп који у пресеку са $\{1, n-1, n\}$ даје $\{1, n-1\}$, тада тај подскуп не садржи елемент $n-2$, па уклањањем елемента $n-1$ добијамо један задовољавајућ подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ (који овог пута садржи елемент 1). Јасно је да је овакво пресликавање бијекција, чиме је лема доказана.

Вратимо се сада на постављени задатак. Нека су витези распоређени за округлим столом на начин који је предвиђен у поставци, и нека су обележени словима $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2013}$ редом како седе. Приметимо да су међу витезовима $v_1, v_{184}, v_{367}, \ldots, v_{1831}$ непријатељи тачно они витезови који су суседи у овом низу, и додатно витезови v_1 и v_{1831}; одатле, од њих се може формирати група међу којима нема непријатеља на тачно $L_{11} = 199$ начина (при чему смо овде урачунали и празан скуп). На исти начин закључујемо да од витезова $v_2, v_{185}, v_{368}, \ldots, v_{1832}$ можемо формирати групу на тачно L_{11} начина, и тако резонујемо све до низа $v_{183}, v_{366}, v_{549}, \ldots, v_{2013}$. Свим могућим комбинацијама до сада наведених група добијамо број $L_{11}^{\frac{2013}{11}} = 199^{183}$. Како група коју на крају формирамо мора бити непразна, одбацујући тај случај добијамо решење $199^{183} - 1$.

Први разред – Б категорија

1. Дати израз можемо трансформисати као $25! + 26! = 25! \cdot (1 + 26) = 25! \cdot 27 = 25! \cdot 3^3$. Сваки трећи број у производу $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 25$ дељив је са 3, тј. таквих бројева има 8, што засад даје $3^8 \mid 25!$. Бројеви 9 и 18 дељиви су не само са 3 него и са 9, што додаје још по један фактор 3 у броју 25!. Другим речима, имамо $3^{10} \mid 25!$ али $3^{11} \nmid 25!$. Додајући још и три фактора 3 која долазе од другог чиниоца, закључујемо да $3^{13} \mid 25!$ али $3^{14} \nmid 25!$, тј. $n = 13$.

2. Приметимо: за било коју тачку M на неком најкраћем путу од P до Q, у тачку M можемо стићи само из тачке L која се налази непосредно лево од M или из тачке I која се налази непосредно испод M (слика лево). Зато је број најкраћих путева од P до M једнак збиру броја најкраћих путева од P до L и броја најкраћих путева од P до I. Непосредним пребројавањем, приказаним на слици десно, добијамо да је број најкраћих путева од P до Q једнак 200. (Заинтересованим ученицима предлажемо да погледају и 5. задатак у 3А разреду на овом такмичењу, што је сложенија верзија овог задатка.)



Оп 2014 1Б 2

3. Све могуће комбинације за два човека које је туриста срео јесу: (v, v), (v, p), (p, p) и (p, v) (при чему у свакој загради на првом месту стоји v уколико је нижи човек витез а p ако је подлац, а друго место на сличан начин карактерише вишег човека). На своје прво питање туриста би добио одговор „не“ само у четвртом случају, а одговор „да“ у свим осталим случајевима. Дакле, пошто туристи одговор на прво питање није био довољан, закључујемо да је тај одговор био „да“ и да важи неки од прва три случаја. На своје друго питање туриста би добио одговор „да“ у првом и трећем случају, а одговор „не“ у другом случају. Пошто је туристи овај одговор био довољан да сазна шта је желео, закључујемо да је одговор био „не“ и да важи други случај, тј. нижи човек је витез а виши подлац. (Тангента 73, стр. 49, зад. 28.)

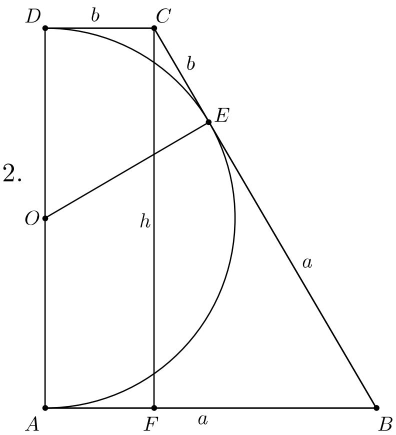
4. Доказаћемо да обе стране посматране еквиваленције имају исту вредност за ма какве вредности исказних слова p, q и r. Уколико слово r има вредност $\top$, десна страна еквиваленције има вредност $\top$, а вредност леве стране је вредност импликације облика $\bot \Rightarrow \ldots$, па је и вредност леве стране једнака $\top$. Даље, уколико неко од слова p или q има вредност $\top$, десна страна еквиваленције има вредност $\top$, а вредност леве стране је вредност импликације облика $\ldots \Rightarrow \top$, па је и вредност леве стране једнака $\top$. Најзад, уколико сва три посматрана слова имају вредност $\bot$, тада десна страна еквиваленције има вредност $\bot$, а лева страна има вредност $\neg\bot \Rightarrow \bot \vee \bot$, тј. $\top \Rightarrow \bot$, што је $\bot$. Овим је доказ завршен. (Тангента 73, стр. 33, зад. I.2.)

5. Спајање било која два раздвојена ланчића захтева раскидање и поновно састављање једне алке, што златара кошта 3 \$. Како на почетку имамо четири ланчића, златару треба најмање 9 \$ да би обавио посао. Покажимо да му је 9 \$ и довољно. Златар може да раскине све три алке најмањег ланчића, и две од њих искористи да од прва три ланчића направи један отворен ланчић (од 15 алки: 13 колико укупно та три ланчића имају, плус још 2 узете од трећег ланчића), а трећу искористи за затварање ланчића укруг. (Тангента 73, стр. 51, зад. I.6.)

Други разред – Б категорија

1. Нека је O центар тог круга, тј. средина странице AD, а E тачка додира тог круга са краком BC. Лако је уочити $\triangle OAB \cong \triangle OEB$ ($OE = OA$ као полупречници поменутог круга, $\measuredangle OAB = \measuredangle OEB = 90^\circ$, $OB = OB$, па подударност следи по ставу ССУ). Одатле добијамо $AB = BE = a$. Аналогно добијамо $DC = CE = b$. Дакле, $BC = a + b$. Нека је F подножје нормале из C на AB. Означимо $CF = h$ (ово је висина посматраног трапеза). Применом Питагорине теореме на $\triangle BCF$ добијамо $(a+b)^2 = h^2 + (a-b)^2$; одавде израчунавамо $h^2 = 4ab$, тј. $h = 2\sqrt{ab}$. Дакле, површина посматраног трапеза износи: $P = \frac{h(a+b)}{2} = \frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{2} = \sqrt{ab}(a+b)$.

2. Докажимо да Пера (први играч) добија. У свом првом потезу Пера уписује $b = 0$. Тада Мика мора уместо a и c уписати бројеве различите од нуле. Једначина која се тако добија своди се на $x^2 = -\frac{c}{a}$. Ова једначина или има два реална решења или нема ниједно (у зависности од тога да ли је вредност $-\frac{c}{a}$ позитивна или негативна); дакле, Пера побеђује ма како Мика одиграо.



Оп 2014 2Б 1

3. Посматрајмо бројеве 12345678900000, 12345678900001, 12345678900002, ..., 12345678902012. Како они представљају 2013 узастопних природних бројева, они дају све могуће остатке при дељењу са 2013. Дакле, међу овим бројевима постоји неки који даје остатак 0 при дељењу са 2013, тј. постоји број дељив са 2013. (Тангента 74, стр. 12, зад. М1175.)

4. а) Из услова задатка добијамо $y^2 = \frac{xy \cdot yz}{zx} \in \mathbb{Q}$ (производ два рационална броја опет је рационалан број, и количник два рационална броја различита од нуле опет је рационалан број). Аналогно добијамо $x^2 \in \mathbb{Q}$ и $z^2 \in \mathbb{Q}$. Како је збир рационалних бројева опет рационалан број, добијамо $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$.

b) Из услова задатка имамо

$$(xyz)^2 = (xy)(yz)(zx) \in \mathbb{Q}.$$

Даље, такође из услова задатка као и дела доказаног под а), добијамо

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \in \mathbb{Q}.$$

Квадрирајмо познат идентитет $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$. Добијамо:

$$(x^3 + y^3 + z^3)^2 - 6(x^3 + y^3 + z^3)xyz + 9(xyz)^2 = (x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)^2.$$

Десна страна ове једнакости јесте рационалан број (за први чинилац смо показали да је рационалан, а за други то следи из услова задатка као и дела под а)). Сабирци $(x^3 + y^3 + z^3)^2$ и $9(xyz)^2$ такође су рационални бројеви. Како је и $x^3 + y^3 + z^3$ рационалан број различит од нуле, да би лева страна била рационалан број (што мора бити, јер смо за десну констатовали да јесте рационалан број) мора важити $xyz \in \mathbb{Q}$. Сада лако добијамо $z = \frac{xyz}{xy} \in \mathbb{Q}$, и аналогно следи $x \in \mathbb{Q}$ и $y \in \mathbb{Q}$. (Тангента 72, стр. 13, зад. М1128.)

5. Како се ниједна цифра не сме појављивати више од два пута, сваки од посматраних четвороцифрених бројева записан је или помоћу две цифре од којих се свака појављује по два пута, или помоћу све три дозвољене цифре међу којима се једна појављује тачно два пута, а преостале две тачно по једном. У првом случају, уколико су те две цифре 1 и 2, тада можемо добити бројеве 1122, 1212, 1221, 2112, 2121 и 2211, тј. шест могућности; исто важи уколико фиксирамо цифре 1 и 3, односно 2 и 3, што све заједно даје 18 могућности у првом случају. У другом случају, уколико се цифра 1 појављује два пута а преостале две цифре по једном, тада можемо добити бројеве 1123, 1132, 1213, 1312, 1231, 1321, 2113, 3112, 2131, 3121, 2311 и 3211, тј. дванаест могућности; исто важи уколико се цифра 2 (а не цифра 1) појављује два пута, као и уколико се цифра 3 (а не цифра 1) појављује два пута, што све заједно даје 36 могућности у другом случају. Дакле, имамо укупно 54 таква броја. (Тангента 74, стр. 36, зад. I.1(a).)

Трећи разред – Б категорија

1. Додаћемо по $2\sin^4 x \cos^4 x = \frac{\sin^4 2x}{8}$ на обе стране. Добијамо $(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 = \frac{17}{32} + \frac{\sin^4 2x}{8}$. Такође из $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$ добијамо $(1 - \frac{\sin^2 2x}{2})^2 = \frac{17}{32} + \frac{\sin^4 2x}{8}$. Ако уведемо смену $t = \frac{\sin^2 2x}{2}$, после сређивања добијамо квадратну једначину $t^2 - 4t + \frac{15}{16} = 0$. Њена решења су $\frac{15}{4}$ и $\frac{1}{4}$. Прво очито отпада због интервала у ком се налази синус, а из другог добијамо: $\frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{4}$, тј. $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, а одавде имамо $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Дакле, скуп решења је: $x \in \{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$.

2. У свакој врсти постоји бар $n + 1$ краљевских поља, те на целој табли има бар $(2m + 1) \cdot (n + 1)$ краљевских поља. Аналогно, на целој табли има бар $(2n + 1) \cdot (m + 1)$ царских поља. Нека је K скуп краљевских поља, а C скуп царских поља. Важи $|K \cup C| = |K| + |C| - |K \cap C|$. Из ове једнакости, затим малочас добијених неједнакости, и најзад неједнакости $|K \cup C| \leqslant (2m + 1)(2n + 1)$ (јер на табли укупно имамо $(2m + 1)(2n + 1)$ поља) добијамо

$$|K \cap C| = |K| + |C| - |K \cup C| \geqslant (2m + 1)(n + 1) + (2n + 1)(m + 1) - (2m + 1)(2n + 1) = m + n + 1,$$

што је и требало доказати.

3. Нека је $\overline{xy}$ двоцифрен број дељив производом својих цифара. Тада постоји природан број k такав да важи $10x + y = kxy$, тј. $y = (ky - 10)x$. Одавде закључујемо $x \mid y$, па тиме и $0 < x \leqslant y$.

Ако важи $x = y$, тада следи $11x = kx^2$, те следи $11 = kx$. Једина могућност је $k = 11$ и $x = y = 1$.

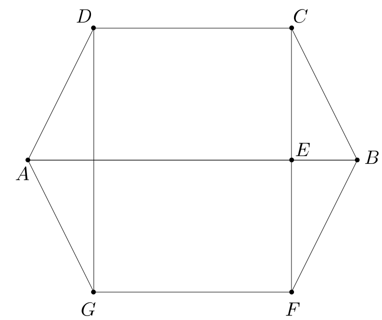
Ако важи $x < y$, тада следи $x \leqslant 4$ (у супротном y неће бити цифра). За $x = 4$ добили бисмо $y = 8$, али то није могуће јер би тада важило $48 = 32k$. За $x = 3$ важи $10x = (kx-1)y$, тј. $30 = (3k-1)y$. Како имамо $y \leqslant 9$, $3 \mid y$ и $y \mid 30$, закључујемо $y = 6$. За $x = 2$ важи $20 = (2k-1)y$, и како имамо $y \leqslant 9$, $2 \mid y$ и $y \mid 20$, закључујемо $y = 4$. Коначно, за $x = 1$ следи $10 = (k-1)y$, па y може узети вредности 2 и 5.

Према томе, услове задатка испуњавају бројеви 11, 12, 15, 24 и 36. (Тангента 73, стр. 14, зад. M1155.)

4. Нека је посматрани трапез $ABCD$, при чему је AB дужа основица. Нека је E подножје нормале из C на основицу AB. Из $AC \perp BC$ добијамо $BC = AB\cos\alpha = a\cos\alpha$. Затим одавде добијамо $CE = BC\sin\alpha = a\cos\alpha\sin\alpha$ и $BE = BC\cos\alpha = a\cos^2\alpha$. Добијено тело може се поделити на две подударне купе, чији полупречници основа износе CE а висине BE, као и један ваљак полупречника основе CE и висине CD. Одатле је тражена запремина једнака:

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}CE^2\cdot\pi\cdot BE + CE^2\cdot\pi\cdot CD = \frac{2}{3}(a\cos\alpha\sin\alpha)^2\pi(a\cos^2\alpha) + (a\cos\alpha\sin\alpha)^2\pi(a-2a\cos^2\alpha) = a^3\pi\cos^2\alpha\sin^2\alpha\left(1-\frac{4\cos^2\alpha}{3}\right).$$

(Тангента 69, стр. 29, зад. III.5.)



Оп 2014 3Б 4

5. Ако би међу оних шест узастопних дана током којих је дечак давао нама познате одговоре били и понедељак и уторак, морали бисмо имати два узастопна иста одговора (будући да дечак и понедељком и уторком говори истину), што немамо; дакле, једине две могућности које преостају јесу могућност да је низ питања почео у уторак (а шести одговор добили смо у недељу), као и могућност да је низ питања почео у среду (а шести одговор добили смо у понедељак). Претпоставимо да је посреди друга могућност. Тада смо у суботу добили одговор „Тома“, а у понедељак такође одговор „Тома“; но, ово је немогуће будући да суботом дечак увек лаже, а понедељком увек говори истину. Дакле, остаје једино прва могућност; како је у том случају дечак у уторак дао одговор „Иван“ а уторком увек говори истину, и како је у том случају седми дан понедељак, када дечак опет говори истину, закључујемо да је седмог дана дечак дао одговор „Иван“. (Тангента 73, стр. 52, зад. II.8.)

Четврти разред – Б категорија

1. *Прво решење.* На основу једначине из поставке следи да су $x_1 = \sqrt[4]{x-2}$ и $x_2 = \sqrt[4]{4-x}$ решења неке квадратне једначине облика $x^2 - 2x + q = 0$, за погодно одабрано q. Надаље ћемо користити следеће једнакости: $x_1 + x_2 = 2$ (дато у поставци), $x_1x_2 = q$ (следи из Вијетових формула) и $x_1^4 + x_2^4 = 2$ (директно се уочава). На основу њих имамо $(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, па је $x_1^2 + x_2^2 = 4 - 2q$. Поновним квадрирањем имамо $x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 = 16 - 16q + 4q^2$, тј. $2 + 2q^2 = 16 - 16q + 4q^2$. Решавањем ове квадратне једначине по q добијамо $q_1 = 7$, за које се види да x_1 и x_2 нису реални, па полазна једначина тада нема решења, а за $q_2 = 1$ имамо $x_1 = x_2 = 1$, па добијамо једино решење $x = 3$.

Друго решење. Као у претходном решењу, означимо $x_1 = \sqrt[4]{x-2}$ и $x_2 = \sqrt[4]{4-x}$. Имамо $x_1 + x_2 = 2$ и $x_1^4 + x_2^4 = 2$. Применом неједнакости између квадратне и аритметичке средине два пута добијамо:

$$1 = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\frac{x_1^4 + x_2^4}{2}} = \sqrt{\sqrt{\frac{(x_1^2)^2 + (x_2^2)^2}{2}}} \geqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geqslant \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.$$

Одатле, у горњем низу свугде морају важити једнакости, што је могуће само за $x_1 = x_2$. Сада из $\sqrt[4]{x-2} = \sqrt[4]{4-x}$ добијамо $x = 3$.

2. Неједнакост доказујемо математичком индукцијом. За $n = 2$ неједнакост важи (своди се на $2!\cdot 4! > (3!)^2$, тј. $48 > 36$). Претпоставимо да посматрана неједнакост важи за уочен природан број n, и докажимо да она тада важи и за $n+1$, тј. $2!\cdot 4!\cdots(2(n+1))! > ((n+2)!)^{n+1}$. Имамо:

$$\begin{aligned} 2!\cdot 4!\cdots(2(n+1))! &= (2!\cdot 4!\cdots(2n)!)\cdot(2n+2)! > ((n+1)!)^n\cdot(2n+2)! = ((n+1)!)^n\cdot(n+1)!\cdot((n+2)(n+3)\cdots(2n+2)) \\ &> ((n+1)!)^n\cdot(n+1)!\cdot(n+2)^{n+1} = ((n+1)!)^{n+1}\cdot(n+2)^{n+1} = ((n+2)!)^{n+1}, \end{aligned}$$

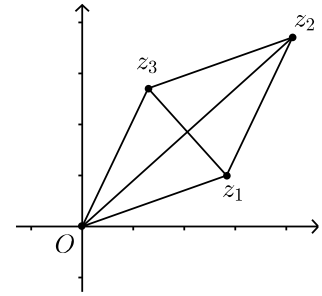
што је и требало доказати. (Тангента 72, стр. 14, зад. M1133.)

3. Из постављених услова закључујемо да се теме z_3 посматраног ромба добија ротацијом темена z_1 око тачке O за $45°$. Другим речима,

$$z_3 = z_1 \cdot (\cos 45° + i \sin 45°) = (2\sqrt{2}+i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

Теме z_2 можемо добити као централносиметричну слику темена O у односу на пресек дијагонала, тј. у односу на средиште дужи чији су крајеви темена z_1 и z_3 (будући да се дијагонале ромба полове). Тражено средиште је тачка $\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{6+\sqrt{2}}{4}$, одакле добијамо

$$z_2 = 2\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{6+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{6+\sqrt{2}}{2}.$$



Оп 2014 4Б 3

(Тангента 72, стр. 31, зад. III.4.)

4. Приметимо да за $x = 0$ имамо $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 + \frac{0^3}{3} = 0$, тј. обе стране посматране неједнакости су једнаке. Докажимо да је функција $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$ строго растућа у задатом интервалу. Довољно је показати $f'(x) > 0$. Имамо:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} - x^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2.$$

Уколико покажемо да за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $\operatorname{tg} x > x$, добијамо $f'(x) > 0$, чиме би доказ био завршен. У ту сврху, дефинишимо $g(x) = \operatorname{tg} x - x$. Како је $g(0) = 0$, довољно је показати да за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $g'(x) > 0$. И заиста,

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x > 0,$$

што је и требало доказати. (Тангента 69, стр. 32, зад. IV.3.)

5. Постоји 900 троцифрених бројева. Оних шестоцифрених бројева који се могу представити као производ два различита троцифрена броја има највише $\frac{900 \cdot 899}{2} = 404550$, а оних шестоцифрених бројева који се могу представити као производ два иста троцифрена броја има највише 900. Одатле, шестоцифрених бројева који се могу представити као производ два троцифрена броја има највише 405450, што је мање од половине укупног броја шестоцифрених бројева (којих има 900000). Дакле, више има оних који се не могу написати као производ два троцифрена броја.